وزارت معارف

رهنمای معلم ریاضی

صنف ۱۱

رهنمای معلم ریاضی صنف ۱۱



۱۳۹۹ هـ . ش.



سرود ملی

دا وطن افغانستان دی — دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې — هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی — د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو — د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، گوجر دي — پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي — هم ایماق، هم پشه یان
دا هېواد به تل ځلیږي — لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به — لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر — وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحیم



رهنمای معلم

ریاضی

صنف ۱۱

سال چاپ: ۱۳۹۹ هـ . ش

مشخصات کتاب

مضمون: رهنمای معلم ریاضی
مؤلفان: گروه مؤلفان کتاب‌های درسی بخش دیپارتمنت ریاضی
ویراستاران: اعضای دیپارتمنت ویراستاری و ایدیت زبان دری
صنف: یازدهم
زبان: دری
انکشاف دهنده: ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
ناشر: ریاست ارتباط و آگاهی عامۀ وزارت معارف
سال چاپ: ۱۳۹۹ هجری شمسی
ایمیل آدرس: curriculum@moe.gov.af

پیام وزیر معارف

اقرأ باسم ربک

سپاس و حمد بیکران آفریدگار یکتایی را که بر ما هستی بخشید و ما را از نعمت بزرگ خواندن و نوشتن برخوردار ساخت، و درود بی‌پایان بر رسول خاتم- حضرت محمد مصطفی ﷺ که نخستین پیام الهی بر ایشان «خواندن» است.

چنانچه بر همه‌گان هویداست، سال ۱۳۹۷ خورشیدی، به نام سال معارف مسمی گردید. بدین ملحوظ نظام تعلیم و تربیت در کشور عزیز ما شاهد تحولات و تغییرات بنیادینی در عرصه‌های مختلف خواهد بود؛ معلم، متعلم، کتاب، مکتب، اداره و شوراهای والدین، از عناصر شش‌گانه و اساسی نظام معارف افغانستان به شمار می‌روند که در توسعه و انکشاف آموزش و پرورش کشور نقش مهمی را ایفا می‌نمایند. در چنین برهه سرنوشت‌ساز، رهبری و خانوادۀ بزرگ معارف افغانستان، متعهد به ایجاد تحول بنیادی در روند رشد و توسعه نظام معاصر تعلیم و تربیت کشور می‌باشد.

از همین‌رو، اصلاح و انکشاف نصاب تعلیمی از اولویت‌های مهم وزارت معارف پنداشته می‌شود. در همین راستا، توجه به کیفیت، محتوا و فرایند توزیع کتاب‌های درسی و رهنمای تدریس در مکاتب، مدارس و سایر نهادهای تعلیمی دولتی و خصوصی در صدر برنامه‌های وزارت معارف قرار دارد. ما باور داریم، بدون داشتن کتاب درسی باکیفیت، به اهداف پایدار تعلیمی در کشور دست نخواهیم یافت.

برای دستیابی به اهداف ذکرشده و نیل به یک نظام آموزشی کارآمد، از آموزگاران و مدرسان دلسوز و مدیران فرهیخته به‌عنوان تربیت کننده‌گان نسل آینده، در سراسر کشور احترامانه تقاضا می‌گردد تا در روند آموزش این کتاب درسی و انتقال محتوای آن به فرزندان عزیز ما، با استفاده از این رهنما، از هیچ نوع تلاشی دریغ نورزیده و در تربیت و پرورش نسل فعال و آگاه با ارزش‌های دینی، ملی و تفکر انتقادی بکوشند. هر روز علاوه بر تجدید تعهد و حس مسؤولیت پذیری، با این نیت تدریس راآغاز کنند، که در آیندۀ نزدیک شاگردان عزیز، شهروندان مؤثر، متمدن و معماران افغانستان توسعه یافته و شکوفا خواهند شد.

همچنین از دانش آموزان خوب و دوست داشتنی به مثابه ارزشمندترین سرمایه‌های فردای کشور می‌خواهم تا از فرصت‌ها غافل نبوده و در کمال ادب، احترام و البته کنجکاوی علمی از درس معلمان گرامی استفادۀ بهتر کنند و خوشه چین دانش و علم استادان گرامی خود باشند.

در پایان، از تمام کارشناسان آموزشی، دانشمندان تعلیم و تربیت و همکاران فنی بخش نصاب تعلیمی کشور که در تهیه و تدوین این رهنمای تدریس مجدانه شبانه روز تلاش نمودند، ابراز قدردانی کرده و از بارگاه الهی برای آن‌ها در این راه مقدس و انسان‌ساز موفقیت استدعا دارم.

با آرزوی دستیابی به یک نظام معارف معیاری و توسعه یافته، و نیل به یک افغانستان آباد و مترقی دارای شهروندان آزاد، آگاه و مرفه.

دکتور محمد میرویس بلخی

وزیر معارف

فهرست عناوین

عنوان **صفحه**

سخنی چند به معلم

معلم محترم!

کتاب رهنمای معلم ریاضی که به اساس روش آموزش فعال تألیف گردیده است صرف برای استفادۀ شما بوده به دسترس شاگردان نباید قرار داده شود.

برای تدریس هرچه بهتر درس و آموزش شاگردان نکات زیر را مورد توجه قرار دهید:

۱) به مجرد داخل شدن به صنف بعد از گفتن السلام وعلیکم و گرفتن جواب(علیکم السلام) از طرف شاگردان، به اجرای فعالیت های مقدماتی چون(احوالپرسی، تنظیم صنف، گرفتن حاضری، ملاحظه کارخانه گی و ارزیابی درس گذشته و درصورت امکان درس جدید را با درس گذشته ارتباط داده به تدریس درس جدید اقدام نمایید، آن هم طوری که از بخش مقدماتی سؤالهای مطرح کنید تا شاگردان تفکر نمایند و جواب بدهند، در غیر آن خود به توضیح آن بخش بپردازید.

۲) مواد ممد درسی(مواد محیطی که در محیط شما پیدا می شود) که در رهنما از آنها تذکر به عمل آمده رفته اند از قبل تهیه وبه صنف بیاورید.

۳) در این رهنما میتود هایی آموزش فعال به کار گرفته شده است که علاوه بر آنها میتواند از میتود های سود مندی که خود در طول تجربه وتدریس تان فراگرفته اید کار بگیرید.

۴) در این کتاب مراحل تدریس به شکل علمی آن درنظر گرفته شده است. اگر تطبیق آن مراحل،عملی شود به یقین که تدریس شما سود مند واقع می شود.

۵) در موضوعی که تدریس مینمایید تاحد امکان سعی به عمل آمده است تا برای هر درس، معلومات اضافی تهیه گردد که استفاده از آن در هنگام تدریس خالی از مفاد نیست.

۶) یک ساعت ۴۵ دقیقه یی طوری تقسیم گردیده است تا بتوانید در اوقات معینه تدریس تان را به پیش ببرید و اختتام بخشید؛ اگر احیاناً در کدام درس این زمانبندی عملی نشده، خود صلاحیت کم ویا زیاد کردن وقت را دارید؛ طور مثال: اگر فعالیت جریان درس که درمدت ۲۸ دقیقه از طرف مؤلفان درنظر گرفته شده است اگر از نظر شما زیاد است می توانید آن را ۲۰ دقیقه درنظر گرفته انجام دهید و از ۸ دقیقۀ اضافی آن در اجرای متباقی فعالیت ها استفاده کنید و امثال آن.

۷) سهیم ساختن شاگردان در اجرای فعالیت از اولویت کاری شما درجریان تدریس می باشد که باید شاگردان را به اجرای فعالیت‌ها طور عادلانه سهم بدهید.

۸) تمرین ها باید درصنف باسهم گیری شاگردان کارشود.

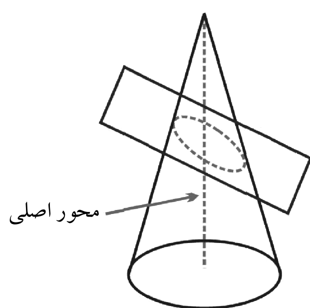
۹) درصورتی که تعداد سؤالها دریک تمرین زیاد باشد یکتعداد آن برای تحکیم درس با اشتراک فعال شاگردان درصنف حل شود ومتباقی به حیث کار خانه گی به شاگردان وظیفۀ داده شود.

۱۰) در اخیر هر فصل تمرین مربوط فصل جا داده شده است، سعی شود تا نظر به مشکل بودن و یا آسان بودن سؤالها، سؤالهای تمرین فصل را در دوساعت، سه ساعت ویا چهار ساعت درسی نظر به لزوم دید تان باسهم گیری شاگردان حل کنید.

۱۱) در کتاب درسی ریاضی ممکن بعضی اشتباهات طباعتی مو جود باشد و نمیتوان الی فرارسیدن تجدیدنظر به اصلاح آن پرداخت، لیکن آن اشتباهات در نوشتن کتاب رهنمای معلم ریاضی در نظر گرفته شده است، معلمان محترم میتوانند به رویت کتاب رهنما اشتباهات را مرفوع سازند.

ومن الله توفیق

فصل اول مقاطع مخروطی(*Conic sections*)



عنوان درس: مقاطع مخروطی

صفحهٔ کتاب (3)

وقت تدریس(1 ساعت درسی 45 دقیقه)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مخروط را بشناسند. • مفهوم مقاطع مخروطی را بدانند. • بااستفاده از یک کارد(به منزلهٔ یک مستوی) از قطع یک مخروط، مقاطع مخروطی را حاصل و از همدیگر تشخیص کرده بتوانند. • از کسب دانش و مهارت فوق احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	کارد میوه خوری، زردک، قیچی و کاغذ، چارت شکل ورودی و چارت‌های اشکال صفحهٔ 4
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از ادای سلام، احوالپرسی، تنظیم صنف[1]، گرفتن حاضری، چارت اشکال صفحهٔ 4 را پیشروی صنف بیاویزد و سؤال ورودی را از شاگردان بپرسد، در صورتی که شاگردان جواب گفته نتوانند معلم چنین توضیح دهد: • هرگاه یک مخروط توسط یک مستوی به صورت افقی قطع گردد مقطع شکل دایره را دارا می‌باشد. • هرگاه مخروط توسط مستوی به صورت مایل قطع شود مقطع یک بیضوی را تشکیل می‌دهد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم عنوان تعریف مقاطع مخروطی را روی تخته بنویسد و چارت مربوط را که از قبل تهیه نموده است پیشروی صنف بیاویزد.

- مخروط، محور اصلی، مؤلد، رأس، قسمت فوقانی و تحتانی و طرز تشکیل مخروط را به شاگردان توضیح دهد.

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند به هر گروه دو، دو دانه زردک را با یک کارد و یا یک دانه قیچی و کاغذ که شکل پُری دوا(شکل مخروطی) را دارند توزیع بدارد تا شاگردان فعالیت صفحهٔ 3 کتاب درسی را طور مرتب انجام دهند؛ یعنی عمود به محور اصلی قطع کنند(افقی)، مایل به محور اصلی قطع کنند موازی به مولد قطع کنند، دو زردک سربه سر را طبق هدایت قطع کنند و بالآخره فعالیت شماره پنجم را طبق هدایت انجام دهند.

---

[1]- سلام دادن، احوالپرسی، تنظیم صنف، گرفتن حاضری و ملاحظهٔ کارخانه گی در درسهای بعدی به نام فعالیت‌های مقدماتی مسما گردیده است.

- معلم در اخیر نمایندهٔ یک گروه را بخواهد تا نتیجهٔ فعالیت خویش را به دیگران توضیح دهد. هرگاه در توضیح و نتیجه‌گیری گروه مذکور اشتباهی موجود بود، نمایندهٔ گروه دیگری را وظیفه دهد تا نتیجهٔ فعالیت خویش را به هم- صنفان خود بیان کند در صورت مشکلات معلم همکاری نماید.

تحکیم درس(7) دقیقه

معلم غرض تحکیم بخشیدن درس نتایج درس را به عبارات ساده بیان کند و سؤالهای شماره 1، 2 را باسهم گیری شاگردان در صنف حل کند.

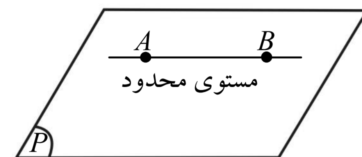
ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

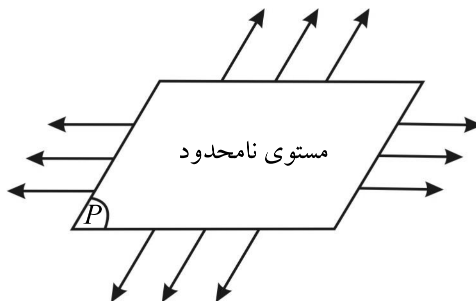
- معلم غرض ارزیابی دانش و مهارت شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. مقاطع مخروطی به کدام اشکال هندسی گفته می‌شود؟
2. کی می‌تواند به روی تخته یک مستوی و یک مخروط را طوری تقاطع دهد که در نتیجهٔ تقاطع یک دایره تشکیل شود، همینطور شاگرد دیگری طوری تقاطع دهد که از تقاطع شان یک بیضوی تشکیل شود.

معلومات اضافی برای معلم

مستوی یک اصطلاح اولیه(تعریف ناشده) پذیرفته شده‌یی است؛ لیکن سطح آب ساکن، سطح میز و سطح یک پارچه کاغذ هموار را می‌توان به حیث یک مستوی شناخت؛ بنابرآن برای ارائهٔ یک مستوی از اشکال ذیل مانند مستوی محدود و مستوی نامحدود استفاده می‌شود که مستوی را طور معمول به P نمایش میدهند.

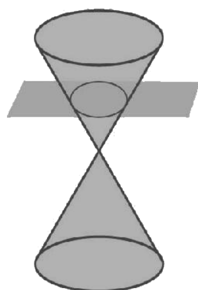




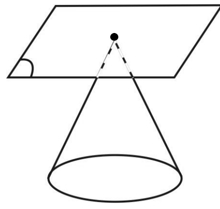
جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 4

1- با در نظرداشت اشکال فوق مستوی و مخروط را به شکل متقاطع رسم کنید که فصل مشترک شان دایره و یا یک نقطه باشد.

حل: اگر یک مستوی مخروط را طوری قطع کند که عمود به محور اصلی و یا موازی به قاعدهٔ مخروط باشد، در اینصورت فصل مشترک شان یک دایره می‌باشد؛ مانند شکل مقابل.

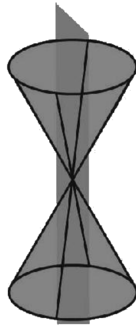


هرگاه یک مستوی موازی با قاعده(به صورت افقی) از رأس مخروط عبور کند محل تقاطع شان یک نقطه می‌باشد.



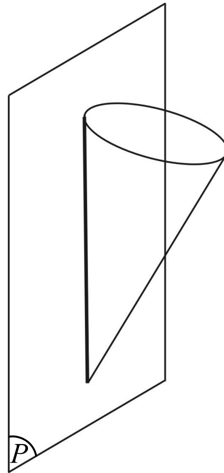
2- اگر یک مستوی دو مخروط رأس به رأس را قسمی قطع کند که محور اصلی هر دو مخروط را دربر داشته باشد فصل مشترک شان کدام نوع منحنی می باشد؟

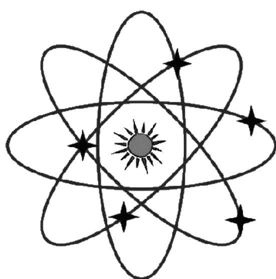
حل: اگر مستوی محور اصلی هر دو مخروط را در برداشته باشد، در آن صورت فصل مشترک مستوی و مخروط‌ها دو خط متقاطع می‌باشد که در شکل صفحهٔ چهارم کتاب درسی به مشاهده می‌رسد.



3- فصل مشترک یک مخروط و یک مستوی در کدام حالت یک خط مستقیم است توسط شکل نشان دهید.

حل: هرگاه یک مستوی به سطح جانبی یک مخروط در حالت تماس قرار بگیرد، از تماس هر دو یک خط مستقیم تشکیل می‌شود.





فصل اول مقاطع مخروطی (Conic sections)

عنوان درس: بیضوی (Ellipse)

صفحهٔ کتاب (5)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • بیضوی را بشناسند. • محراقها، رأسها، محور اصلی و مؤلد بیضوی را بشناسند. • اصطلاحات(نامهای) فوق را در شکل نشان داده بتوانند. • بااستفاده از دو میخ و طناب بتوانند یک بیضوی را ترسیم کنند. • دانش و مهارت کسب شده را در زنده‌گی روزمره به کار گیرند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	میخ‌های شیشه با تار یا میخ‌های 4انچ یا میخ چوبی باطناب به قدر ضرورت، چارت ورودی و چارت فعالیت دومی
توضیح ورودی (5) دقیقه	-معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، چارت ورودی را پیشروی صنف بیاویزد و به شاگردان بگوید که شما در مضمون جغرافیه خوانده اید که سیاره‌ها به دور آفتاب مسیر بیضوی را می‌پیمایند و در شکل برای شان نشان دهد.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم محترم! هرگاه میزهای شاگردان طوری باشد که روی آنها می‌توانست میخ‌های شیشه را کوبید در آن صورت شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نمایید تا فعالیت اول صفحهٔ 5 کتاب درسی را انجام دهند، در غیرآن شاگردان را بیرون از صنف به دو گروه تقسیم و میخ‌های چوبی یا 4 انچ را به دو نقطه بکوبند و طناب را زیادتر از فاصله بین دو میخ طور حلقه شده طوری که حلقه به تماس میخ‌ها نباشند(تا طناب حلقه شده آزاد گردش کند) بیاندازند؛ سپس یک چوبک را به تماس طناب یا تار قرار داده به دور میخها حرکت دهند دیده خواهد شد که مسیر چوب متحرک یک بیضوی را به وجود می‌آورد. نقاطی را که میخها در آن‌ها کوبیده شده اند به نام محراقهای بیضوی می‌نامند.

- معلم محترم چارت فعالیت دوم را پیشروی صنف بیاویزد، از یک شاگرد بخواهد تا فعالیت مذکور را با استفاده از فرمول دریافت فاصله بین دو نقطه؛ یعنی $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ طول‌های MF', MF و AA' و همچنان حاصل جمع $|MF|+|MF'|$ را به دست آورد.

- همزمان عین فعالیت را شاگردان دیگر نیز در کتابچه‌های خویش انجام دهند و با حل روی تخته مقایسه نمایند، معلم از جریان فعالیت شاگردان نظارت کند در صورتی که مشکل داشته باشند آنها را کمک و رهنمایی کند.

تحکیم درس (7) دقیقه

- معلم غرض تحکیم بخشیدن درس، جزء سوم فعالیت دوم را که در صفحهٔ 6 کتاب درسی است باسهم گیری شاگردان به شیوهٔ سؤال و جواب روی تخته انجام دهد.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

- معلم برای اطمینان خویش از کسب دانش و مهارت شاگردان، سؤال‌های زیر را از ایشان بپرسد:

1. بیضوی چه نوع یک شکل هندسی را می‌گویند؟
2. کی می‌تواند بیضوی را ترسیم و محراقهای آن را در آن نشان دهد؟

معلومات اضافی برای معلم

میخواهیم فاصله بین دو نقطهٔ $M(1,\frac{3}{2})$ و $F(1,0)$ را پیدا کنیم؛ پس:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$d_1=MF=\sqrt{(1-1)^2+(\frac{3}{2}-0)^2}=\sqrt{(\frac{3}{2})^2}=\frac{3}{2}$$

$$d_2=MF'=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(\frac{3}{2}-0)^2}$$

$$d_2=MF'=\sqrt{(1+1)^2+(\frac{3}{2})^2}=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{16+9}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

$$|MF|=\frac{3}{2}\ ,\quad |MF'|=\frac{5}{2}\ ,\quad |MF|+|MF'|=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$AA'=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+(0-0)^2}=\sqrt{(2+2)^2}=\sqrt{4^2}=4$$

چون $AA'=|MF|+|MF'|=4$ است؛ پس ثابت شد که $AA'=|MF|+|MF'|=2a$ می‌باشد.

فصل اول مقاطع مخروطی (Conic sections)

عنوان درس: قطرها و رأس‌ها، رابطه بین محراق‌ها، مرکز و محور تناظر بیضوی و عن‌المرکزیت

صفحهٔ کتاب (6-8)

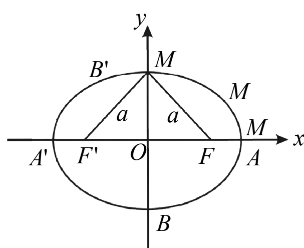
وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • قطر و رأس بیضوی را بشناسند، رابطه بین محراق‌ها و قطرها را بدانند. • محور تناظر و مرکز تناظر بیضوی را بشناسند و همچنان مفهوم عن‌المرکزیت را بدانند. • رابطه بین محراقها را با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث دریابند و با استفاده از شکل عن-المرکزیت بیضوی را به دست آرند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارت شکل‌های صفحات 6 و 7
توضیح ورودی (5) دقیقه	• چون عناوین فوق، عناوین فرعی بیضوی اند، از اینرو سؤال ورودی ندارد که توضیح داده شود.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس، عنوان درس را روی تخته بنویسد. چارت صفحهٔ 6 کتاب درسی را پیشروی صنف بیاویزد، سپس به نوبت دو شاگرد را بخواهد تا شاگرد اول قطرهای بیضوی را در شکل نشان دهد و نام بگیرد؛ طور مثال AA' و BB' قطرهای بیضوی و شاگرد دوم رأسهای بیضوی را مشخص و نام بگیرد؛ سپس از شاگرد سومی بپرسد تا قطرهای اطول(دراز، بزرگ) و اصغر(کوتاه، خورد) را با استفاده از چارت نشان دهد که AA' قطرطول بیضوی و BB' قطراصغر آن می‌باشد.

یادداشت: معلم از شاگردی بپرسد هرگاه نقطهٔ M بالای B و یا B' که رأسهای بیضوی اند قرار بگیرد چه حالتی در شکل بیضوی پدید می‌آید؟ در صورتی که شاگرد جواب گفته نتوانست معلم بگوید، که $MF'=MF'$ می گردد.



$$\overline{MF}+\overline{MF}'=2a$$
$$2\overline{MF}=2a \quad \Rightarrow \quad \overline{MF}=a$$

در مثلث قایم‌الزاویهٔ FMO طبق قضیهٔ فیثاغورث $a^2=b^2+c^2$.

تحکیم درس (7) دقیقه

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

فرمول فوق رابطه بین محراقها و قطرهای بیضوی را نشان میدهد.

- معلم از یک شاگرد بخواهد تا مرکز تناظر و محور تناظر یک بیضوی را نشان دهد، اگر شاگرد نتوانست مرکز و محور تناظر را معرفی کند معلم خود به معرفی هر دو بپردازد.

- همچنین بپرسد که: کی می‌تواند عن‌المرکزیت بیضوی را تعریف کند؟

در صورتی که شاگردان نتوانند تعریف عن‌المرکزیت را ارائه کنند خود معلم آن را تعریف کند.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

- معلم غرض متیقن شدن از فراگیری شاگردان، سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. کی قطرها و رأسهای بیضوی را معرفی کند؟
2. کی رابطه بین قطرهای اطول و اصغر را توسط فرمول ارائه می‌کند؟
3. عن‌المرکزیت چیست تعریف کنید؟
4. به کدام دلیل همیشه $e < 1$ می‌باشد؟

معلومات اضافی برای معلم

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}}$$
$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

جواب به سؤال های تمرین صفحۀ 8

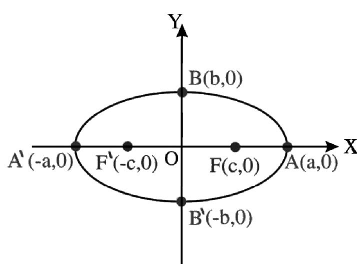
1 – هرگاه دربیضوی طول قطر کبیر مساوی به طول قطر صغیر شود،کدام منحنی به دست می آید؟

حل: هرگاه در بیضوی طول قطر کبیر مساوی به طول قطر صغیر گردد، بیضوی به دایره تبدیل می‌گردد؛ یعنی منحنی حاصله دایره می‌باشد.

2 – اگر عن المرکزیت بیضوی $\frac{2}{3}$ باشد، در آن صورت نسبت بین قطر کبیر و قطر صغیر را دریافت کنید.

حل: چون $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$ است، از اینجا $c = 2$ و $a = 3$ قیمت می‌گیرد، از فرمول $a^2 = b^2 + c^2$ قیمت b ؛ یعنی قطر صغیر را به دست می‌آوریم:

$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$b^2 = (3)^2 - (2)^2 = 9 - 4 = 5$$
$$\boxed{b = \pm\sqrt{5}}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{\text{قطر کبیر}}{\text{قطر صغیر}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$



فصل اول مقاطع مخروطی (*Conic sections*)

عنوان درس: معادلهٔ بیضوی

صفحهٔ کتاب (9)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • معادلهٔ بیضوی را بدانند. • معادلهٔ بیضوی را دریافت نمایند. • سؤالها را با استفاده از فرمول بیضوی حل کنند. • از حل سؤالها، کسب دانش و مهارت فوق، لذت برند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارت شکل دوم صفحهٔ 9 با خط درشت، کاغذ گراف
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، چارت از قبل تهیه شده را روی تخته آویزان کند و سؤال ورودی را از شاگردان بپرسد، تا شاگردان در مورد آن فکر نمایند.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم محترم فعالیت صفحهٔ 9 کتاب درسی را به یک شاگرد بدهد تا روی تخته انجام دهد. همزمان عین فعالیت را به دیگر شاگردان نیز بدهد تا در کاغذهای گراف انجام دهند. معلم از کار و فعالیت شاگردان نظارت نماید و شاگردان ضعیف را رهنمایی و کمک کند. در ختم فعالیت شاگرد روی تخته فعالیت خود را به دیگران توضیح دهد در صورت اشتباه شاگرد دیگری توظیف شود تا فعالیت را انجام دهد. شاگردانی که مرتکب اشتباه شده اند اشتباه خویش را اصلاح نمایند.

- معلم با در نظرداشت رابطه‌یی که از تعریف بیضوی بر می‌آید یعنی $|MF|+|MF'|=2a$ به شیوهٔ سؤال و جواب(سهم گیری شاگردان) معادلهٔ بیضوی را به اثبات برساند.

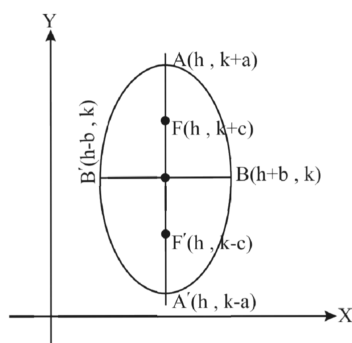
تحکیم درس (7) دقیقه

- معلم محترم مثال دوم صفحهٔ 10 کتاب درسی را به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

- معلم غرض متیقن شدن از فراگیری شاگردان سؤالهای زیر را از آنها بپرسد:

1. کی معادلهٔ بیضوی را طور شفاهی می‌گوید؟
2. کی معادلهٔ بیضوی را می‌نویسد، در صورتی که محراقهای آن روی محور x قرار داشته باشند؟



فصل اول مقاطع مخروطی (Conic sections)

عنوان درس: معادلۀ بیضوی- حالت دوم محراقها روی محور y

صفحۀ کتاب (10)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر باشند تا: • معادلۀ بیضوی را بدانند. • معادلۀ بیضوی را دریافت کنند. • سؤالها را با استفاده از فرمول بیضوی حل نمایند. • از حل سؤالها، کسب دانش و مهارت فوق لذت برند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارت معلومات اضافی همین درس
توضیح ورودی (5) دقیقه	معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس، چارت از قبل تهیه شده را پیشروی صنف بیاویزد و بپرسد: در درس گذشته چون محراق‌ها روی محور x قرار داشت معادلۀ بیضوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بود، حال که محراقها روی محور y قرار دارند معادلۀ بیضوی چی شکلی را خواهد داشت؟ در صورت عدم دریافت جواب، معلم بنویسد که $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ معادلۀ بیضوی است که محراق‌های آن روی محور y می-باشد.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم محترم فعالیت مثال اول صفحۀ 10 کتاب درسی را به شیوۀ سؤال و جواب در صنف حل کند.
- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا مثال 3 کتاب درسی را به مشورۀ همدیگر حل کنند.
- معلم از گروه‌ها نظارت جدی به عمل آورد تا شاگردان ازکتاب حل مثال را نقل نکنند.
- معلم گروه‌های فعال را تشویق و گروه‌های ضعیف را رهنمایی کند، کوشش شود تا در هر گروه شاگردان لایق و ضعیف تنظیم شوند.

در ختم فعالیت از دو گروه به نوبت نماینده بخواهد تا روی تخته کار گروهی خویش را به دیگران توضیح دهند. معلم در صورت عدم توانمندی شاگردان، آنها را کمک و رهنمایی کند.

تحکیم درس (7) دقیقه

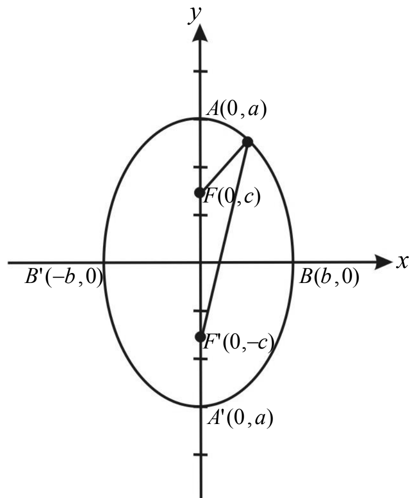
- معلم غرض تحکیم بخشیدن درس مثال 4 صفحۀ 12 کتاب درسی را به شیوۀ سؤال و جواب(شاگردان سهیم شوند) در صنف حل کند.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

- معلم غرض متیقن شدن از فراگیری شاگردان از موضوعهای فوق سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. معادلهٔ بیضوی در صورتی که محراق‌ها روی محور y باشند کدام است؟
2. کی معادلهٔ بیضوی را می‌نویسد؟ در صورتی که نصف قطر اطول $5cm$ و نصف قطر اصغر $2.5cm$ باشد.

معلومات اضافی برای معلم



$$MF=\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}$$
$$MF'=\sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2}$$
$$MF+MF'=2a\ \dots\ I$$

MF و MF' را در رابطه I وضع می‌کنیم:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2}=2a\ \dots\ II$$

معادلهٔ II را ساده می‌سازیم:

$$\sqrt{x^2+(y-c)^2}+\sqrt{x^2+(y+c)^2}=2a$$
$$\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2a-\sqrt{x^2+(y+c)^2}$$

اطراف را مربع می‌سازیم:

$$x^2+(y-c)^2=(2a-\sqrt{x^2+(y+c)^2})^2$$
$$x^2+y^2-2cy+c^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}+x^2+(y+c)^2$$
$$x^2+y^2-2cy+c^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}+x^2+y^2+2cy+c^2$$
$$-4cy=4a^2-4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}\ \ /\div(-4)$$
$$cy=-a^2+a\sqrt{x^2+(y+c)^2}$$
$$cy+a^2=a\sqrt{x^2+(y+c)^2}$$

اطراف را مربع می‌سازیم:

$$(cy+a^2)^2=a^2\{x^2+(y+c)^2\}$$
$$c^2y^2+2a^2cy+a^4=a^2\{x^2+y^2+2cy+c^2\}$$
$$c^2y^2+2a^2cy+a^4=a^2x^2+a^2y^2+2a^2cy+a^2c^2$$
$$a^2x^2+a^2y^2-c^2y^2-a^4+a^2c^2=0$$
$$y^2(a^2-c^2)+a^2x^2-a^2(a^2-c^2)=0$$
$$y^2b^2+a^2x^2-a^2b^2=0$$
$$y^2b^2+a^2x^2=a^2b^2$$

اطراف را تقسیم a^2b^2 می‌کنیم:

$$\frac{y^2b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2x^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1}$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 12

1 – معادلات زیر را درنظر بگیرید طول قطر کبیر و فاصله بین محراق‌ها را به دست آورید.

$a)\ \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1 \qquad b)\ \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$

حل: برای حل سؤال‌ها نخست قطر کبیر فاصلهٔ محراقی را پیدا می‌کنیم:

$a)\ a^2=36 \Rightarrow a=\pm 6$

$b^2=16 \Rightarrow b=\pm 4$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c^2=a^2-b^2=36-16=20$

چون $a>b$ است؛ بنابر آن محور محراقی موازی به محور x می‌باشد.

$c^2=20 \Rightarrow c=\pm\sqrt{20}$ یا $c=\pm 2\sqrt{5}$

چون a نصف قطر اطول(قطر کبیر) می‌باشد، بنابرآن طول قطر کبیر مساوی $2a$ است و $2c$ فاصله بین محراق‌ها را نشان می‌دهد؛ پس:

$|AA'|=2a=2\cdot 6=12 \quad , \quad |FF'|=2c=2\cdot(2\cdot\sqrt{5})=4\sqrt{5}$

$b)\ a^2=100 \Rightarrow a=\pm 10$

$b^2=36 \Rightarrow b=\pm 6$

باز هم معلوم می‌شود که $a>b$ بوده و محور محراقی موازی محور x می‌باشد.

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=100-36=64 \ , \ \boxed{c=\pm 8}$

$|AA'|=2a=2\cdot 10=20 \quad , \quad |FF'|=2c=2\cdot 8=16$

2 – معادلهٔ بیضوی را بنویسید که عن المرکزیت آن 0.8 باشد.

حل: می‌دانیم که $e=\frac{c}{a}=0.8=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

$c=4 \ , \ a=5$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b^2=a^2-c^2$

$b^2=25-16 \Rightarrow b^2=9 \ , \ \boxed{b=3}$

چون $a>b$ است؛ بنا بر آن محور محراقی موازی محور x می‌باشد که معادلهٔ آن عبارت از $\frac{x}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ یا

$$\boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

فصل اول مقاطع مخروطی (Conic sections)

عنوان درس: معادلۀ الپسی که مرکز آن یک نقطۀ آن اختیاری باشد(حالت اول)

صفحۀ کتاب (13)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر باشند تا: • معادلۀ الپسی را که مرکز آن مبدای کمیات وضعیه نباشد بدانند. • بیضوی را در صورتیکه مشخصات آن داده شود ترسیم کنند. • موقعیت بیضوی را نظر به قمیت‌های h و k تعیین نمایند. • از کسب دانش و مهارت فوق احساس مسرت نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارت شکل صفحۀ 13 کتاب درسی و چارت معادله‌های $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ و $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس، چارت از قبل تهیه شده را پیشروی صنف بیاویزد و سؤال ورودی را از شاگردان بپرسد، هرگاه شاگردان جواب گفته نتوانستند معلم به طرف شکل اشاره کند و مرکز بیضوی که مختصات آن جوره‌های مرتب h و k اند به $O(h,k)$ نمایش داده شده است به شاگردان نشان دهد؛ چون محراق‌ها روی خطی که موازی محور x است قرار دارند؛ بنا بر آن $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ است و $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ معادلۀ بیضوی است که محراقهای آن روی مستقیمی قرار دارد که موازی محور y باشد و این میرساند که مرکز این بیضوی تحت شرایط فوق در مبدای کمیات وضعیه نمی‌باشد.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

معلم فعالیت صفحۀ 13 کتاب درسی را به شاگردان بدهد تا در کتابچه‌های خویش انجام دهند، همزمان عین فعالیت را یک شاگرد به روی تخته انجام دهد، معلم محترم مراقبت نماید تا شاگردان مصروف اجرای فعالیت خویش باشند و از روی تخته حل نکنند، در ختم فعالیت شاگرد روی تخته فعالیت خویش را به دیگران توضیح بدارد. هرگاه نواقصی در کار وی به مشاهده میرسد معلم رهنمایی کند و شاگردان دیگر اشتباهات خویش را اصلاح نمایند.

- معلم حالت اول را که محور محراقی موازی به محور x می‌باشد با استفاده از چارت به شیوۀ سؤال و جواب(سهم گیری شاگردان) در صف کار کند؛ یعنی معادلۀ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ را اثبات کنند.

تحکیم درس (7) دقیقه

- معلم غرض تحکیم بخشیدن درس مثال 1 صفحهٔ 14 کتاب درسی را به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف کار کند.

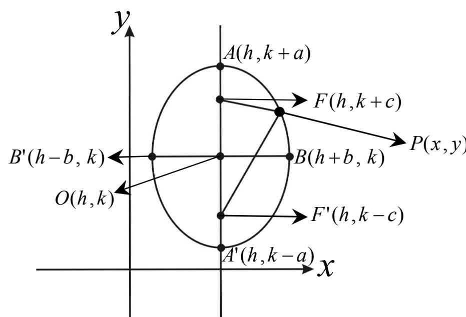
ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم غرض اطمینان از فراگیری شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. کی معادلهٔ بیضوی‌ای را می گوید که مرکز آن در مبدای کمیات وضعیه قرار داشته باشد؟
2. کی معادلهٔ بیضوی‌ای را می نویسد که مرکز آن در مبدای کمیات وضعیه نباشد؟

معلومات اضافی برای معلم

ثبوت حالت دوم با استفاده از تعریف بیضوی داریم که:



$$|PF|+|PF'|=2a \ \dots \ \text{I}$$

$$|PF|=\sqrt{(x-h)^2+\{(y-k)-c\}^2}$$

$$|PF'|=\sqrt{(x-h)^2+\{(y-k)+c\}^2}$$

قیمت‌های $|PF|$ و $|PF'|$ را در رابطهٔ I وضع می کنیم:

$$\sqrt{(x-h)^2+\{(y-k)-c\}^2}+\sqrt{(x-h)^2+\{(y-k)+c\}^2}=2a \ \dots \ \text{II}$$

معادلهٔ II را تغییر شکل می‌دهیم:

$$\sqrt{(x-h)^2+\{(y-k)-c\}^2}=2a-\sqrt{(x-h)^2+\{(y-k)+c\}^2} \ \dots \ \text{III}$$

اطراف رابطهٔ III را مربع می‌سازیم و داریم که:

$$(x-h)^2+\{(y-k)-c\}^2=4a^2-4a\sqrt{(x-h)^2+\{(y-k)+c\}^2}+(x-h)^2+\{(y-k)+c\}^2$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2-2c(y-k)+c^2=4a^2-4a\sqrt{(x-h)^2+\{(y-k)+c\}^2}+(x-h)^2+(y-k)^2+2c(y-k)+c^2$$

$$-2c(y-k)-2c(y-k)=4a^2-4a\sqrt{(x-h)^2+\{(y-k)+c\}^2}$$

$$-4c(y-k)-4a^2=-4a\sqrt{(x-h)^2+\{(y-k)+c\}^2}$$

اطراف مساوات را تقسیم -4 می نماییم:

$$c(y-k)+a^2=a\sqrt{(x-h)^2+\{(y-k)-c\}^2}$$

حال اطراف مساوات را مربع می‌سازیم:

$$\{c(y-k)+a^2\}^2=\left[a\sqrt{(x-h)^2+\{(y-k)+c\}^2}\right]^2$$

$$c^2(y-k)^2+2a^2c(y-k)+a^4=a^2[(x-h)^2+\{(y-k)+c\}^2]$$

$$c^2(y-k)^2+2a^2c(y-k)+a^4=a^2\left[(x-h)^2+(y-k)^2+2c(y-k)+c^2\right]$$

$$c^2(y-k)^2+2a^2c(y-k)+a^4=a^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2+2a^2c(y-k)+a^2c^2$$

$$c^2(y-k)^2-a^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=-a^4+a^2c^2$$

اطراف مساوات را ضرب (-1) نموده داریم:

$$-c^2(y-k)^2+a^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=+a^4-a^2c^2$$

$$(y-k)^2(a^2-c^2)+a^2(x-h)^2=a^2(a^2-c^2)$$

$a^2-c^2=b^2$ وضع می کنیم: $(y-k)^2b^2+a^2(x-h)^2=a^2b^2$

اطراف مساوات را تقسیم a^bb^2 می کنیم:

$$\frac{(y-k)b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2(x-h)^2}{a^2b^2}=1 \ \Rightarrow \ \boxed{\frac{(y-k)}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

فصل اول مقاطع مخروطی (Conic sections)

عنوان درس: معادلۀ الپسی که مرکز آن یک نقطۀ اختیاری باشد(حالت دوم)

صفحۀ کتاب (14)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • بدانند که با تغییر موقعیت محور محراقی از موازی بودن به محور x، به موازی شدن به محور y) معادلۀ بیضوی تغییر شکل می‌کند. • بامشاهده شکل یک بیضوی شکل معادلۀ آن را تعیین کنند. • با مشاهدۀ معادله‌های $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ و $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ بدانند که گراف بیضوی چی شکلی را دارد.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارت شکل صفحۀ 13 کتاب درسی ...
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس، بدانـد کـه سؤال ورودی صفحۀ 13 حالت اول در این حالت نیز صدق می‌کند.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم محترم، در کتاب درسی اثبات حالت دوم به شاگردان وظیفه داده شده است، تا جایی که فکر می‌شود از تحمل شاگردان بالاست، زیرا سه سؤال تمرین هم به ارتباط این درس موجود است، بنا براین ثبوت آن، در معلومات اضافی شده است آن را مطالعه نماید و به شیوۀ سؤال و جواب در صنف کار کند(سهیم ساختن شاگردان شرط است) شاگردان حاضر جواب را تحسین و آفرین کند.

- معلم بعد از گرفتن تماس در مورد یادداشت، مثال 2 مربوط صفحۀ 15 را با سیهم ساختن شاگردان(شیوۀ سؤال و جواب) درصنف کارکنند.

تحکیم درس (7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس، مثال 3 صفحۀ 16 کتاب درسی را(در حالی‌که شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم می‌کند) به شاگردا بدهد تا در مشورت باهم حل کنند. معلم از جریان کار گروهی شاگردان نظارت کند. معلم گروه‌های فعال را تشویق و ضعیفان را رهنمایی نماید. در ختم فعالیت یک یا دو شاگرد را از گروه‌ها بخواهد تا کار گروهی خویش را به دیگران توضیح دهند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم غرض اطمینان از فراگیری شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. کی در یک شکل، مختصات محراق‌ها، مختصات رأسها و مختصات مرکز بیضوی را نشان میدهد؟

2. کی مختصات محراقها، رأسها، طول قطر کبیر و قطر صغیر را در معادلات زیر دریافت می‌کند؟

$$a)\ \frac{(x+3)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{9}=1 \quad , \quad b)\ x^2+2y^2+4x-12y+20=0$$

سؤال شماره 2 ارزیابی 1 تمرینات صفحهٔ 16 کتاب درسی است که حل آن در زمرهٔ جواب به سؤالهای تمرین وجود دارد.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 16

1 – مختصات مرکز، محراق ها، رأس‌ها و طول قطر کبیر هر یک از بیضوی های زیر را دریافت کنید.

$$a)\ \frac{(x+3)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{9}=1 \qquad b)\ x^2+2y^2+4x-12y+20=0$$

حل از فرمول $\frac{(x+3)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ مختصات مرکز بیضوی عبارت از $(h,k)=(-3,1)$ می‌باشد؛ یعنی $h=-3\ ,\ k=1$

$$b^2=2 \ \Rightarrow\ b=\pm\sqrt{2}$$
$$a^2=9 \ \Rightarrow\ a=\pm 3$$

طوری که به ملاحظه میرسد مخرج $(y-1)^2$ نسبت به مخرج $(x+3)^2$ بزرگ‌تر است، بنا برآن محور محراقی بیضوی موازی به محور y می‌باشد. حال با استفاده از رابطهٔ $a^2=b^2+c^2$ ، c را پیدا می کنیم:

$$c^2=a^2-b^2=9-2=7 \ \Rightarrow\ c=\pm\sqrt{7}$$

پس مختصات محراقها عبارتند از:

$$\left.\begin{array}{l} F(h,k+c)=F(-3,1+\sqrt{7}) \\ F'(h,k-c)=F'(-3,1-\sqrt{7}) \end{array}\right\} \text{مختصات محراقها}$$

$$\left.\begin{array}{l} A(h,k+a)=A(-3,1+3)=(-3,4) \\ A'(h,k-a)=A'(-3,1-3)=(-3,-2) \end{array}\right\} \text{مختصات رأسها}$$

$$b)\ x^2+2y^2+4x-12y+20=0$$

در قدم نخست بااستفاده از تکمیل مربع معادله را به شکل معیاری آن می‌نویسیم:

$$x^2+4x+2(y^2-6y)+20=0$$
$$x^2+4x+4-4+2(y^2-6y+9-9)+20=0$$
$$(x+2)^2+2\{(y-3)^2-9\}+16=0$$
$$(x+2)^2+2(y-3)^2-18+16=0$$
$$(x+2)^2+2(y-3)^2-2=0$$
$$(x+2)^2+2(y-3)^2=2$$
$$\frac{(x+2)^2}{2}+(y-3)^2=1$$

از معادلهٔ فوق معلوم می‌شود که مخرج $(x+2)^2$ نسبت به مخرج $(y-3)^2$ بزرگ‌تر است؛ بنابر آن گفته می‌شود که محور محراقی بیضوی موازی به محور x می‌باشد.

$$a^2=2 \quad , \quad a=\pm\sqrt{2}$$
$$b^2=1 \quad , \quad b=\pm 1$$
$$c^2=a^2-b^2 \quad \Rightarrow c^2=2-1=1 \quad , \quad c=\pm 1$$

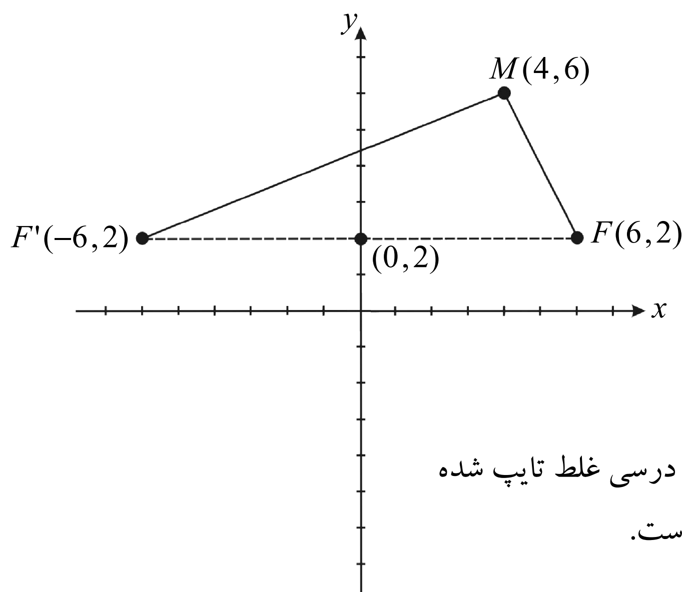
دیده می‌شود که مختصات مرکز بیضوی $(h,k)=(-2,3)$ یعنی $h=-2$ و $k=3$ است.

$$\left.\begin{array}{l} F(h+c,k)=F(-2+1,3)=F(-1,3) \\ F'(h-c,k)=F'(-2-1,3)=F'(-3,3) \end{array}\right\}$$ مختصات محراق‌ها

$$\left.\begin{array}{l} A(h+a,k)=A(-2+\sqrt{2},3) \\ A'(h-a,k)=A'(-2-\sqrt{2},3) \end{array}\right\}$$ مختصات رأسها

2- معادلهٔ بیضوی را بنویسید که مرکز آن درنقطهٔ (2 ، 0) ومحراق آن نقطهٔ (2 ,6) بوده و از نقطهٔ (6 ، 4) بگذارد.

حل:



یادداشت: این سؤال در کتاب درسی غلط تایپ شده است در رهنما اصلاح گردیده است.

$$|AF|+|AF'|=2a \quad , \quad |MF|+|MF'|=2a$$
$$|MF|=\sqrt{(4-6)^2+(6-2)^2}=\sqrt{(-2)^2+(4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$
$$|MF'|=\sqrt{\{4-(-6)\}^2+(6-2)^2}=\sqrt{(10)^2+(4)^2}=\sqrt{116}=2\sqrt{29}$$
$$|MF|+|MF'|=2\sqrt{5}+2\sqrt{29}=2(\sqrt{5}+\sqrt{29})=2a$$
$$a=\sqrt{5}+\sqrt{29} \quad , \quad |FF'|=2c=2\cdot 6=12$$
$$b^2=a^2-c^2=(\sqrt{5}+\sqrt{29})^2-(6)^2=5+2\sqrt{5}\sqrt{29}+29-36=2\sqrt{145}-2$$
$$b^2=22.08 \quad \Rightarrow \boxed{b=\pm 4.7}$$

معادلهٔ بیضوی $\dfrac{(x-0)^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{29})^2}+\dfrac{(y-2)^2}{(2\sqrt{145}-2)^2}=1$

3- معادلات زیر را به شکل معیاری تبدیل نمایید و کمیات وضعیهٔ مرکز، رأس ها، محراق‌ها، طول محور کبیر، محور صغیر و عن‌المرکزیت را دریافت و گراف آن را رسم نمایید.

$a)\ 9x^2+25y^2-36x-150y+36=0 \qquad b)\ 16x^2+4y^2+96x-8y+84=0$

حلa) باز هم از تکمیل مربع استفاده می‌نماییم:

$$9x^2+25y^2-36x-150y+36=0$$
$$9x^2-36x+25y^2-150y+36=0$$
$$9(x^2-4x)+25(y^2-6y)+36=0$$
$$9(x^2-4x+4-4)+25(y^2-6y+9-9)+36=0$$
$$9(x-2)^2-36+25(y-3)^2-225+36=0$$
$$9(x-2)^2+25(y-3)^2=225 \quad /\div 225$$
$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1}$$
$$a^2=25 \Rightarrow a=5$$
$$b^2=9 \Rightarrow b=3$$
$$O(h,k)=O(2,3)$$

بنابر آن مختصات مرکز بیضوی $(h,k)=(2,3)$ می‌باشد؛ پس $h=2,k=3$.

$$a^2=25 \Rightarrow a=\pm 5$$
$$b^2=9 \Rightarrow b=\pm 3$$
$$c^2=a^2-b^2=25-9=16 \Rightarrow c=\pm 4$$

صورتی که مخرج $(x-2)^2$ نسبت به مخرج $(y-3)^2$ بزرگ‌تر است؛ پس محور محراقی بیضوی موازی محور x می‌باشد، بنابر آن:

$$\left.\begin{array}{l} A(h+a,k)=A(2+5,3)=A(7,3) \\ A'(h-a,k)=A'(2-5,3)=A'(-3,3) \end{array}\right\}$$ مختصات رأس‌های قطر کبیر

$$\left.\begin{array}{l} B(h,k+b)=B(2,3+3)=B(2,6) \\ B'(h,k-b)=B'(2,3-3)=B'(2,0) \end{array}\right\}$$ مختصات رأس‌های قطر صغیر

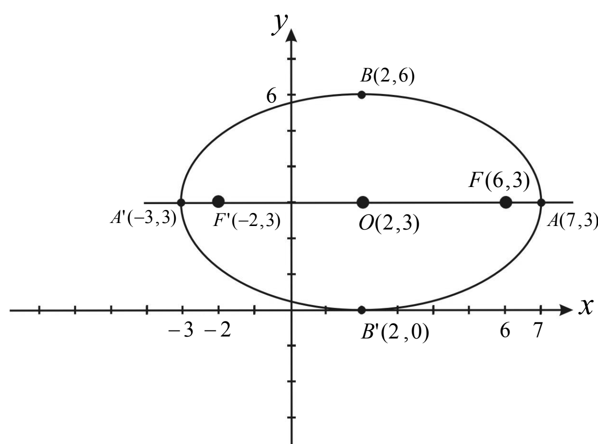
$$\left.\begin{array}{l} F(h+c,k)=F(2+4,3)=F(6,3) \\ F'(h-c,k)=F'(2-4,3)=F'(-2,3) \end{array}\right\}$$ مختصات محراق‌ها

طول قطر کبیر $|AA'|=2a=2\cdot 5=10$

طول قطر صغیر $|BB'|=2b=2\cdot 3=6$

فاصله بین محراق‌ها $|FF'|=2c=2\cdot 4=8$

عن‌المرکزیت $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}=0.8$



حل b)

$$16x^2+4y^2+96x-8y+84=0$$
$$16x^2+96x+4y^2-8y+84=0$$
$$16(x^2+6x)+4(y^2-2y)+84=0$$
$$16(x^2+6x+9-9)+4(y^2-2y+1-1)+84=0$$
$$16(x+3)^2-144+4(y-1)^2-4+84=0$$
$$16(x+3)^2+4(y-1)^2-64=0$$
$$16(x+3)^2+4(y-1)^2=64 \ / \div 64$$
$$\boxed{\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{16}=1}$$

چون مخرج $(y-1)^2$ نسبت به مخرج $(x+3)^2$ بزرگ‌تر است، پس محور محراقی بیضوی موازی محور y می‌باشد.

مختصات مرکز بیضوی $h=-3, k=1$ ، $(h,k)=(-3,1)$:

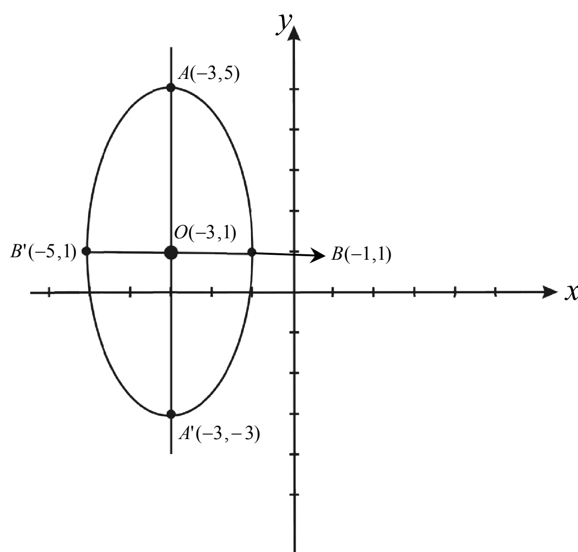
$$a^2=16 \Rightarrow a=\pm 4$$
$$b^2=4 \Rightarrow b=\pm 2$$
$$c^2=a^2-b^2=16-4=12 \quad , \quad c=\pm\sqrt{12}$$
$$c=\pm 2\sqrt{3}$$

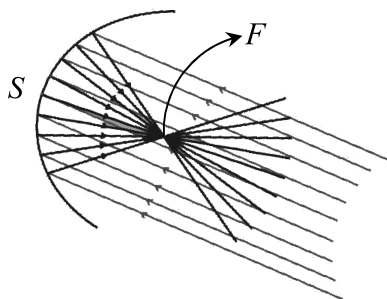
$$\left.\begin{aligned}A(h,k+a)=A(-3,1+4)=A(-3,5)\\ A'(h,k-a)=A'(-3,1-4)=A'(-3,-3)\end{aligned}\right\}$$ مختصات رأس‌های قطر کبیر

$$\left.\begin{aligned}B(h+b,k)=B(-3+2,1)=B(-1,1)\\ B'(h-b,k)=B'(-3-2,1)=B'(-5,1)\end{aligned}\right\}$$ مختصات رأس‌های قطرصغیر

$$\left.\begin{aligned}F(h,k+c)=F(-3,1+2\sqrt{3})\\ F'(h,k-c)=F'(-3,1-2\sqrt{3})\end{aligned}\right\}$$ مختصات محراق‌ها

$$|AA'|=2a=2\cdot 4=8$$
$$|BB'|=2b=2\cdot 2=4$$
$$|FF'|=2c=2(2\sqrt{3})=4\sqrt{3}$$
$$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$





فصل اول مقاطع مخروطی (Conic sections)

عنوان درس: پارابولا

صفحهٔ کتاب (17)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • پارابولا را منحیث یکی از مقاطع مخروطی بشناسندو مفهوم آن را بدانند که پارابولا چگونه یک منحنی است؟ • در مسائل انجینیری یعنی ساخت پُل‌ها، کلکین‌ها وغیره از شکل پارابولا که مقاومت بیشتری دارد استفاده کنند. • با دانستن اهمیت آن احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارت سؤال ورودی و چارت‌های فعالیت د یگر چارت‌های مربوط
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس، چارت مربوط فعالیت صفحهٔ 17 کتاب درسی را پیشروی صنف بیاویزد و سؤال ورودی را از شاگردان بپرسد تا در مورد آن تفکر نمایند و جواب دهند، در غیر آن معلم بگوید اشعه‌یی که موازی به محور اصلی عدسیهٔ مقعر به عدسیه برخورد می‌کند بعد از انعکاس از یک نقطه می‌گذرند که نقطهٔ مذکور را به نام محراق یاد می‌کنند و به F نشان میدهند.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم چارت فعالیت را که از قبل با خط درشت ترسیم نموده است پیشروی صنف بیاویزد.

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا به مشورت همدیگر فعالیت مذکور را انجام دهند. در ختم فعالیت نمایندهٔ یک یا دو گروه را هدایت دهد تا فعالیت خویش را به دیگران توضیح دهند. هرگاه اشتباهی در انجام فعالیت موجود بود معلم رهنمایی کند.

- معلم نتیجهٔ فعالیت را از شاگردان بپرسد، اگر شاگردان از ارائهٔ جواب عاجز ماندند معلم نتیجهٔ فعالیت را که همانا تعریف پارابولا است به شاگردان بیان کند.

- معلم چارتی را که در آن وتر پارابولا ترسیم گردیده است پیشروی صنف بیاویزد و از شاگردان بپرسد:

- کی وتر پارابولا را نشان میدهد؟
- کی وتر پارابولا را تعریف می کند؟

اگر شاگردان جواب، درست گفتند خوب، در غیر آن معلم وترها را در شکل نمایش داده و به تعریف آن بپردازد.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم غرض تحکیم بخشیدن درس، تعریف پارابولا، خط هادی و محور تناظر پارابولا را یکبار دیگر به شیوهٔ مشارکتی توضیح دهد.

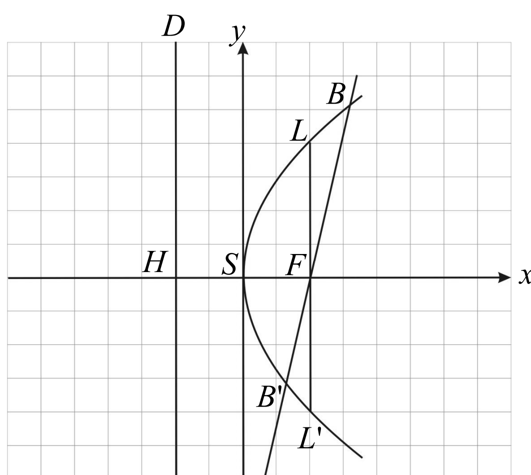
ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای یقین حاصل کردن از فراگیری دانش و مهارت از شاگردان سؤال‌های زیر را بپرسد:

1. پارابولا چی گونه یک منحنی است؟
2. کی می‌تواند رأس، خط هادی و محراق پارابولا را در شکل نشان دهد؟

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 18

طول وتر محراقی پارابولا چند برابرطول FH می باشد؟



حل: قرار تعریف وتر محراقی، خطی که از محراق بگذرد و دو نقطهٔ پارابولا را باهم وصل کند به نام وتر محراقی یاد می‌شود.

به همین قسم وتر عمودی نیز از محراق گذشته دو نقطهٔپارابولا را باهم وصل می کند، بنا بر این هر وتر عمودی، وتر محراقی شده می تواند.

طول وتر عمودی پارابولا چهار چند فاصله بین محراق و رأس آن می‌باشد؛ یعنی $LL'=4\overline{FS}$

چون می‌دانیم که $\overline{FS}=\overline{SH}$ بوده و $\overline{HF}=2\overline{SF}$ است؛ پس وتر محراقی $LL'=4\overline{SF}=4(\frac{\overline{HF}}{2})=2\overline{HF}$ می‌شود

یا گفته می‌توانیم که طول وتر محراقی پارابولا دو چند طول $\overline{HF}$ می‌باشد.

$y^2 = 4px$

$x^2 = 4py$

فصل اول مقاطع مخروطی (Conic sections)

عنوان درس: معادلۀ پارابولا (حالت اول)

صفحۀ کتاب (19)

وقت تدریس (1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • معادلۀ پارابولا را بشناسند و از معادلۀ بیضوی تشخیص دهند. • بدانند که معادلۀ $y^2 = 4Px$ و همچنان معادلۀ $x^2 = 4Py$ معادله‌های پارابولاهایی است که رأس‌های شان در مبدای کمیات وضعیه قرار داشته باشند. • معادلۀ پارابولا را در حالت‌های مختلف با استفاده از شکل استخراج نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارت‌های اشکال پارابولا مربوط صفحات 19 و 20
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس، چارت شکل پارابولای صفحۀ 19 کتاب درسی مربوط حالت اول را پیشروی صنف بیاویزد، درحالی که معادلۀ $y^2 = 4Px$ و $x^2 = 4Py$ روی چارت مذکور نوشته شده است سؤال کند: که این شکل پارابولا به کدام یک از معادله‌ها ارتباط دارد تا شاگردان در مورد تفکر کنند، در صورتی که جواب ارائه نتوانند بااجرای فعالیت ثابت می‌شود که شکل مذکور به معادلۀ $y^2 = 4Px$ تعلق دارد، زیرا محراق F پارابولا روی محور x قرار دارد.

5- فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا با استفاده از چارت تعلیق شده فعالیت را به مشورت یکدیگر انجام دهند.

- معلم از فعالیت گروهها نظارت کند، گروه‌های فعال را تشویق و گروه‌های ضعیف را رهنمایی نماید.

- معلم یک شاگرد را وظیفه دهد تا روی تخته قسمت‌های MF و MK را با استفاده از شکل دریافت کند و در رابطۀ تعریف یعنی $|MF| = |\overline{MK}|$ وضع کند در نتیجه به دریافت معادلۀ پارابولا نایل می‌گردد، همزمان شاگردان در کتابچه‌های خویش بدون اینکه از روی تخته نقل کنند نیز عین فعالیت را انجام دهند. در ختم فعالیت شاگردی که روی تخته فعالیت را انجام داده است، فعالیت خویش را به دیگران توضیح دهد در صورت اشتباه شاگرد دیگری اشتباه آن را رفع نماید و معلم با او همکاری کند.

- معلم در ختم، حالت‌های $P > 0$ و $P < 0$ را به شاگردان بازگو نماید و در اشکال نمایش دهد.

حکیم درس(7) دقیقه

- معلم غرض تحکیم بخشیدن درس، مثال 1 صفحهٔ 20 کتاب درسی را به شیوهٔ سؤال و جواب بالای شاگردان کار کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

معلم برای یقین حاصل کردن از فراگیری دانش و مهارت، از شاگردان سؤال‌های زیر را بپرسد:

1. کی معادلهٔ پارابولا را می‌نویسد که رأس آن در مبدای کمیات وضعیه باشد؟
2. در کدام صورت دهن پارابولا به طرف راست و در کدام صورت دهن آن به طرف چپ باز می‌شود؟
3. هرگاه محراق پارابولا بالای محور x قرار داشته باشد، معادلهٔ آن چی شکل را خواهد داشت؟

فصل اول مقاطع مخروطی (Conic sections)

عنوان درس: حالت دوم معادلۀ پارابولا

صفحۀ کتاب (21)

وقت تدریس (1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • بدانند که در صورت $P > 0$ و $P < 0$ دهن پارابولا، بالا می‌باشد یا پایین. • درصورت موجودیت محراق بالای محور y شکل معادلۀ پارابولا را بشناسند. • معادلۀ پارابولا را با استفاده از شکل و دریافت فاصله بین دو نقطه استخراج کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارتهای صفحۀ 21 کتاب درسی
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس، چارت اول صفحۀ 21 کتاب درسی را پیشروی صنف بیاویزد و بپرسد که: هرگاه محراق F پارابولا روی محور y قرار داشته باشد و خط هادی موازی محور x باشد، معادلۀ پارابولا را کی می‌تواند به دست بیاورد؟ شاگردان شاید خاموشی اختیار کنند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم یک شاگرد را بخواهد تا با استفاده از تعریف پارابولا رابطۀ $|MF| = |MK|$ را روی تخته بنویسد.

شاگرد دوم طول‌های MF و MK را با استفاده از فرمول دریافت فاصله بین دو نقطه، به دست بیاورند.

شاگرد سوم قیمت‌های MF و MK را در رابطۀ $|MF| = |MK|$ به جای شان قرار دهد.

بالآخره شاگرد چهارم اطراف را مربع ساخته و معادلۀ پارابولا را که $x^2 = 4Py$ است حاصل خواهد کرد.

معلم چارت‌های دوم و سوم را پیشروی صنف بیاویزد و حالت‌های مختلف P را که بزرگتر از صفر و همچنان کوچکتر از صفر است درنظر گرفته $P > 0$ و $P < 0$ را در شکل به شاگردان نشان دهد.

تحکیم درس (7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس مثال 2 صفحۀ 22 کتاب درسی را به شیوۀ سؤال و جواب در صنف توسط شاگردان حل کند.

- معلم در صورت لزوم شاگردان را کمک و یاری نماید.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

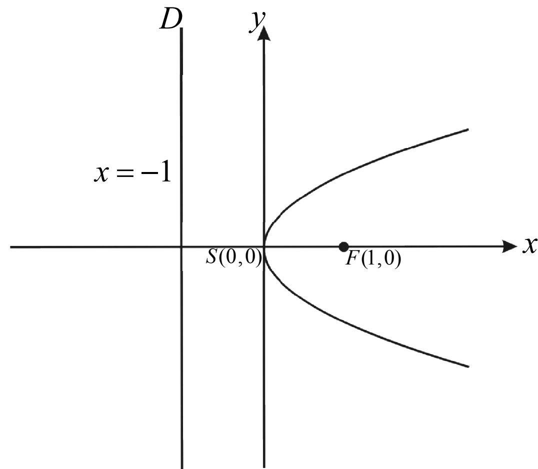
- معلم برای یقین حاصل کردن از فراگیری دانش و مهارت شاگردان، سؤال‌های زیر را از ایشان بپرسد:

1. کی معادلهٔ پارابولا را می‌نویسد که محراق آن روی محور y باشد؟
2. کی فرق بین $x^2 = 4Py$ و $y^2 = 4Px$ را می گوید؟
3. کی می‌تواند اشکال هر دو حالت را روی تخته رسم کند؟

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 22

1 – کمیات وضعیهٔ رأس و معادلهٔ خط هادی(موجه) پارابولا هایی که معادلات آنها عبارت از $y^2 - 4x = 0$ و $x^2 = 2y$ می باشند تعیین کرده و گراف هر کدام آنها را رسم کنید.

حل چون که $P > 0$ است؛ بنابر آن دهن پارابولا به طرف راست محور x باز است.



$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow S(0,0)$$

$F(P,0) = F(1,0)$ مختصات محراق

$\left.\begin{array}{l} x = -P \\ x = -1 \end{array}\right\}$ معادلهٔ خط هادی

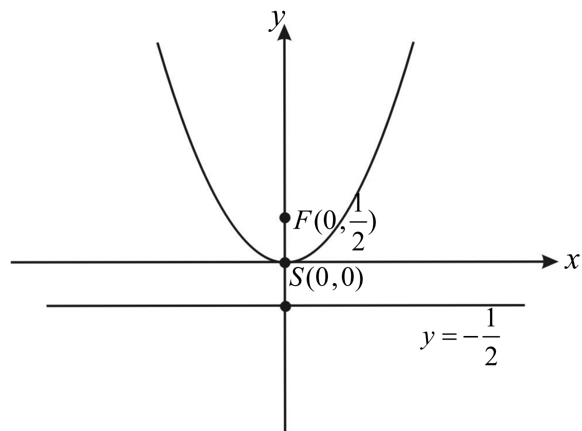
$y^2 = 4Px$ شکل عمومی معادله

چون $P = \frac{1}{2} > 0$ است؛ بنابر آن دهن پارابولا به طرف بالای محور y باز می‌باشد.

$\left.\begin{array}{l} x^2 = 0 \quad , \quad x = 0 \\ 2y = 0 \quad , \quad y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow S(0,0)$ کمیات وضعیهٔ رأس پارابولا

$F(0,P) = F(0,\frac{1}{2})$ کمیات وضعیهٔ محراق پارابولا

$y = -P \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$ معادلهٔ خط هادی(موجه)



2 – معادلهٔ پارابولایی را دریافت کنید که مختصات رأس و محراق آن طور زیر داده شده باشد:

$a)\ S(0,0) \qquad F(0,5)$

$b)\ S(0,0) \qquad F(-2,0)$

حلa) از کمیات وضعیهٔ رأس معلوم می‌شود که رأس پارابولا در مبدای کمیات وضعیه قرار دارد. از مختصات محراق معلوم می‌شود که $P = 5 > 0$ است؛ بنابر آن دهن پارابولا روی محور y به طرف بالا باز می‌باشد.

معادلهٔ عمومی پارابولایی‌که دهن آن روی محور y به طرف بالا باز باشد عبارت از $x^2 = 4Py$ می‌باشد؛ یعنی:

$$x^2 = 4Py \quad , \quad x^2 = 4 \cdot 5y \quad \Rightarrow \boxed{x^2 = 20y}$$

حلb) به ملاحظهٔ مختصات رأس پارابولا، رأس آن در مبدای کمیات وضعیه قرار دارد، لیکن مختصات محراق نشان میدهد که $P = -2 < 0$ بوده، بنا بر آن دهن پارابولا روی محور x به طرف چپ باز می‌باشد و معادلهٔ عمومی آن:

$$y^2 = 4Px \quad , \quad y^2 = 4(-2)x \quad \Rightarrow \boxed{y^2 = -8x}$$

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

فصل اول مقاطع مخروطی (Conic sections)

عنوان درس: معادلهٔ معیاری پارابولا که رأس آن یک نقطهٔ اختیاری باشد

صفحهٔ کتاب (23)

وقت تدریس (1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • شکل معادلهٔ معیاری پارابولا را که رأس آن یک نقطهٔ اختیاری باشد بدانند. • فرق بین اشکالی که در مطابقت با معادلهٔ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ و معادلهٔ $(x-h)^2 = 4P(y-k)$ باشد بدانند. • معادلهٔ پارابولا را در صورتی که رأس آن در مبدای کمیات وضعیه نباشد بنویسند. • از فراگیری مفاهیم فوق احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارت صفحهٔ 23 و دو چارت اول صفحهٔ 24
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم چارت صفحهٔ 23 را که با قلم توش از قبل ترسیم نموده است و معادلات $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ و $(x-h)^2 = 4P(y-k)$ را روی آن نوشته است پیشروی صنف بیاویزد و سؤال ورودی را از شاگردان بپرسد تا در مورد آن فکر کنند، اگر شاگردان از ارائه جواب عاجز ماندند گفته شود که بعد از اجرای فعالیت خواهند یافت: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ که معادلهٔ پارابولایی است که مختصات رأس آن روی مبدای کمیات وضعیه نمی‌باشد.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا دو فعالیت را که با نقطهٔ (•) نشانی شده اند انجام دهند. بعد فاصله‌های MF و MN را بااستفاده از فرمول $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ و شکل دریافت و در مساوات $\overline{MF} = \overline{MN}$ قرار دهند؛ البته بعد از مربع ساختن اطراف و ساده ساختن آن در می یابند؛ که:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

که معادلهٔ فوق به طور یقینی معادلهٔ پارابولایی است که مختصات رأس آن (h,k) و در مبدای کمیات وضعیه نمی‌باشد.

نوت: معلم از کار گروهی شاگردان نظارت کند، گروه‌های فعال را تشویق و گروه‌های ضعیف را کمک نماید.

- معلم در ختم، نمایندهٔ یک گروه را بخواهد تا فعالیت گروهی خویش را به دیگران توضیح دهد. معلم شاگرد را در جریان توضیح فعالیتش رهنمایی و کمک نماید.

- معلم دو حالت اول صفحهٔ 24 را پیشروی صنف بیاویزد و دو شاگرد را به نوبت بخواهد تا در صورت $P > 0$ و همچنان در صورت $P < 0$ اشکال مربوط را به شاگردان معرفی کند.

تحکیم درس (7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس سؤال 1 صفحهٔ 26 کتاب درسی را با سهم گیری فعال شاگردان در صنف کار کند.

سؤال 2 همین صفحه به حیث وظیفهٔ خانه‌گی به شاگردان داده شود.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

- معلم برای اطمینان خویش از آموزش شاگردان سؤال‌های زیر را از ایشان بپرسد:

1. معادله‌های پارابولا که مختصات رأس آن در مبدای کمیات وضعیه نمی‌باشد کدام است؟
2. معادلهٔ هایپربولا را در صورتی که رأس آن در مبدای کمیات وضعیه باشد و رأس آن در مبدای کمیات وضعیه نباشد روی تخته بنویسد.
3. اگر $P > 0$ باشد دهن پارابولا به کدام طرف باز می‌باشد و اگر $P < 0$ باشد در مورد باز بودن دهن پارابولا چی میدانید؟

فصل اول مقاطع مخروطی (Conic sections)

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$
$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

عنوان درس: حالت دوم معادلهٔ معیاری پارابولا که رأس آن یک نقطهٔ اختیاری باشد

صفحهٔ کتاب (24)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

- اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • بدانند، هرگاه محور تناظر پارابولا موازی محور y باشد معادلهٔ پارابولا عبارت از $(x-h)^2 = 4P(y-k)$ می‌باشد. • معادلهٔ فوق را با استفاده از شکل، تعریف پارابولا و دریافت فاصله بین دو نقطه دریافت نمایند. • با کسب دانش و مهارت فوق احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارت دو شکل اخیر صفحهٔ 24
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس از شاگردان بپرسد: • هرگاه محور تناظر موازی محور y باشد معادلهٔ پارابولا چی شکلی را خواهد داشت؟ - معلم چارتهای تهیه شده را پیشروی صنف بیاویزد. احتمال دارد شاگردان با استفاده از شکل بتوانند به دریافت معادله نایل شوند، زیرا حالت اول استخراج معادلهٔ پارابولا ایشان را کمک می‌کند.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا در مشورت باهم با معلوماتی که از درس گذشته دارند حالت دوم معادلهٔ پارابولا را استحصال کنند.
- معلم از جریان فعالیت شاگردان نظارت کند گروه‌های فعال را تشویق کند و گروه‌های ضعیف را رهنمایی نماید، ثبوت حالت دوم به حیث معلومات اضافی کار شده است.
- معلم مثال اول را به شیوهٔ سؤال و جواب(سهم دادن شاگردان) در صنف کار کند.
- معلم مثال دوم را نیز به شیوهٔ سؤال و جواب توسط شاگردان در صنف کار کند.

تحکیم درس (7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس مثال 3 را به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف کار کند.

سؤال سوم وظیفهٔ خانه‌گی.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

- معلم برای متیقن شدن از فراگیری دانش و مهارت شاگردان، سؤال‌های زیر را از ایشان بپرسد:

4. معادله‌های معیاری پارابولا چی شکلی را دارند؟ (یک شاگرد به روی تخته بنویسد.)
5. کی می‌تواند شکل پارابولایی را ترسیم نماید که محور تناظر آن موازی محور y باشد و در آن وترهای محراقی را نشان دهد؟

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ26

1 − معادله پارابولا را دریافت کنید، درصورتی که:

$S(1,3), F(-1,3)$

حل:

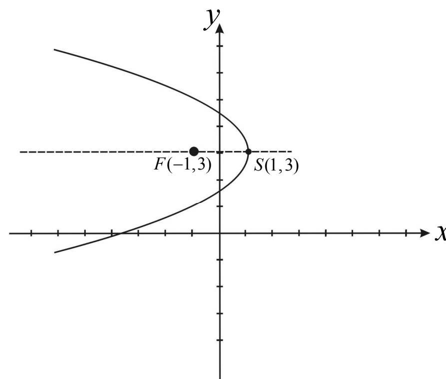
$S(1,3) \Rightarrow h=1 \ , \quad k=3$

$F(-1,3) \Rightarrow h+p=-1 \ , \quad k=3$

از اینکه $P<0$ است؛ پس دهن پارابولا به طرف چپ محور x باز می‌باشد و معادلهٔ عمومی پارابولا عبارت است از:

$(y-k)^2 = 4P(x-h)$

$\boxed{(y-3)^2 = -8(x-1)}$



2 − از معادلهٔ $(y-1)^2 = 12(x-4)$ با تمام جزئیات گراف پارابولا را رسم کنید.

حلa:

$(y-1)^2 = 12(x-4)$

$k=1 \ , \quad h=4 \ , \quad 4P=12 \Rightarrow P=3$

چون $P>0$ است از اینجا معلوم می‌شود که دهن پارابولا به طرف راست محور x باز می‌باشد.

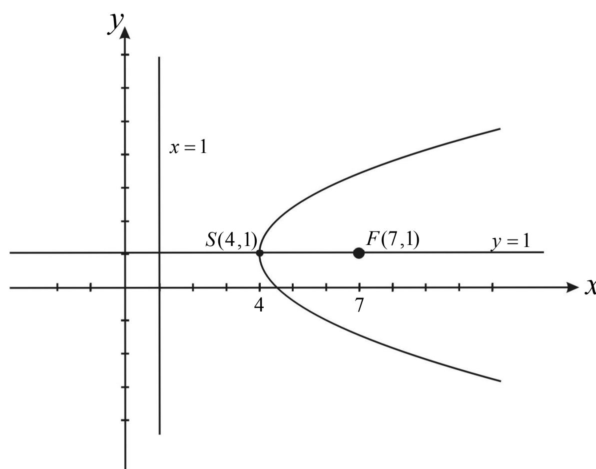
حلb:

مختصات رأس $S(h,k) = S(4,1)$

مختصات محراق $F(h+p,k) = F(4+3,1) = F(7,1)$

معادلهٔ خط مؤجه $\boxed{x=1}$, $x=h-p \;\Rightarrow\; x=4-3=-1$

محور تناظر $y=1$, $y=k$



3 – معادلات زیر را به معادلات معیاری تبدیل و گراف آنها را رسم نمایید.

$a)\; y^2-6y+8x+41=0$ $\qquad\qquad$ $b)\; x^2-2x-6y-53=0$

حلa: با به کار گرفتن مربع کامل داریم:

$$y^2-6y+9-9+8x+41=0$$
$$(y-3)^2+8x+32=0$$

معادلهٔ معیاری پارابولا $(y-3)^2=-8(x+4)$ یا $(y-3)^2+8(x+4)=0$ است.

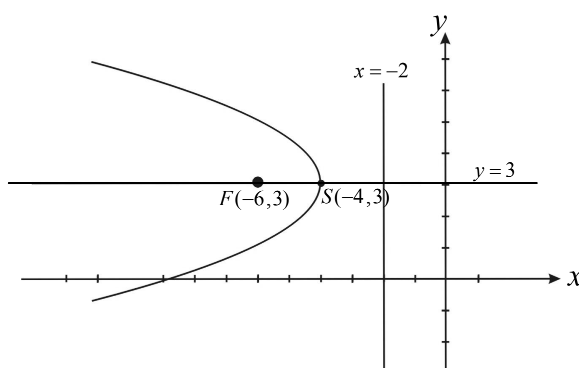
$h=-4$, $k=3$, $S(h,k)=S(-4,3)$, $4P=-8$, $P=-2$

چون $P<0$ است؛ بنابرآن دهن پارابولا به طرف چپ محور x باز است.

مختصات محراق پارابولا $F(h+p,k)=F(-4-2,3)=F(-6,3)$

معادلهٔ موجه $\boxed{x=-2}$, $x=-4+2=-2$, $x=h-p$

محور تناظر پارابولا $y=3$, $y=k$



حلb: باز هم از تکمیل مربع کار می گیریم:

$x^2-2x+1-1-6y-53=0$

$(x-1)^2-6y-54=0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2=6y+54$

$(x-1)^2=6(y+9)$ معادلهٔ معیاری پارابولا

$h=1 \ , \quad k=-9 \ , \quad S(h,k)=S(1,-9)$ رأس پارابولا

$4P=6 \quad , \quad P=\frac{3}{2}$

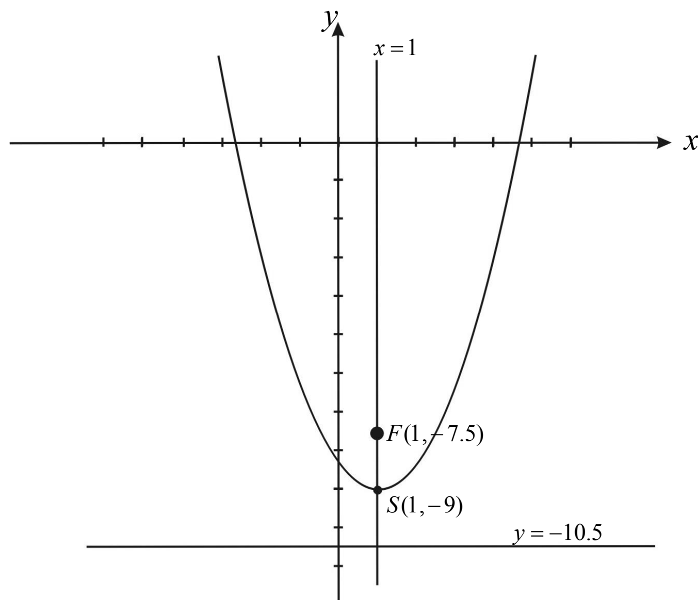
چون $P>0$ است؛ پس دهن پارابولا به طرف بالای محور y باز می‌باشد.

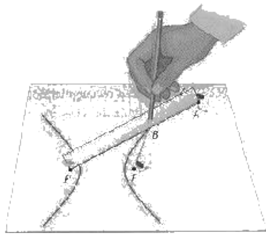
$F(h,p+k)=F(1,\frac{3}{2}-9)=F(1,\frac{3-18}{2})=F(1,-7.5)$ مختصات محراق

$y=k-p \quad \Rightarrow \quad y=-9-\frac{3}{2}=\frac{-18-3}{2}=\frac{-21}{2}=-10.5$

$y=-10.5$ معادلهٔ خط موجه

$x=h \quad \Rightarrow \quad x=1$ محور تناظر





فصل اول مقاطع مخروطی (*Conic sections*)

عنوان درس: هایپربولا

صفحۀ کتاب (27)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم هایپربولا را بدانند. • هایپربولا را از دیگر مقاطع مخروطی تفکیک کنند. • عن‌المرکزیت، محورهای تناظر و رأس‌های هایپربولا را بشناسند. • اجزای یک هایپربولا را بتوانند در شکل نشان دهند. • از کسب دانش و مهارت فوق اعتماد به نفس پیدا کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
- مواد ممد درسی	چارت شکل هایپربولا صفحۀ 27 و چارت شکل هایپربولا صفحۀ 28
توضیح ورودی (5) دقیقه	معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس، سؤال ورودی را از شاگردان بپرسد تا در مورد حل آن شاگردان به تفکر وادار شوند. هرگاه شاگردان جواب ارائه نتوانند در آنصورت بعد از اجرای فعالیت به جواب سؤال ورودی نایل می‌شوند.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم چارت تهیه شده را پیشروی صنف بیاویزد و یک شاگرد را بخواهد تا روی تخته فعالیت را انجام دهد همزمان عین فعالیت را به دیگر شاگردان صنف بدهد تا به صورت انفرادی در کتابچه‌های خویش انجام دهند. در ختم، شاگرد روی تخته فعالیت خویش را به دیگران توضیح دهد. هرگاه توضیحات شاگرد درست باشد خوب، در غیرآن شاگرد داوطلب دیگری توظیف شود که فعالیت را روی تخته انجام دهد، معلم درصورت ضرورت رهنمایی نماید و شاگردانی که فعالیت را غلط انجام داده باشند اشتباه خویش را اصلاح کنند، در نتیجۀ فعالیت تعریف هایپربولا به دست می آید که: $|MF'|-|MF|'=|A'A|=2a$

- معلم چارت صفحۀ 28 کتاب درسی را پیشروی صنف بیاویزد و با سؤال و جواب از شاگردان، محراق‌ها، رأس‌ها محورهای تناظر و هادی‌های هایپربولا را معرفی کند، همچنان عن‌المرکزیت هایپربولا را توضیح و فورمول آن یعنی $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$ را روی تخته بنویسند.

تحکیم درس (7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس، یک شاگرد را بخواهد تا به رویت شکل صفحۀ 28 عناصر(اجزای) هایپربولا را توضیح دهد.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

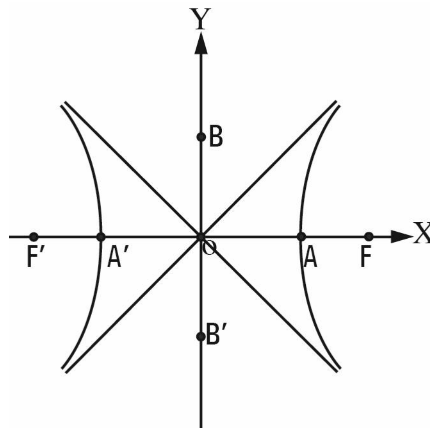
- معلم غرض ارزیابی دانش و مهارت شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

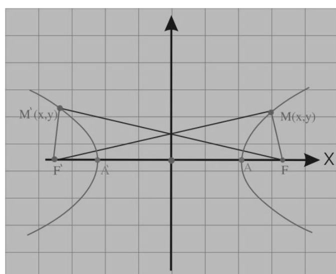
1. کی هایپربولا را تعریف می‌کند؟
2. کی محراق‌ها، رأس‌ها و هادی‌های یک هایپربولا را در رسم نمایش میدهد و معرفی می‌کند؟

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ28

یک شکل هایپرابولا را رسم کنید و در آن مرکز محراق ها، راس های حقیقی و غیر حقیقی محور متقاطع و مزدوج هایپربولا را در آن نشان دهید.

حل:





فصل اول مقاطع مخروطی (*Conic sections*)

عنوان درس: معادلهٔ هایپربولا

صفحهٔ کتاب (29)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • هایپربولا را بشناسند و نظر به تعریف هایپربولا از روی شکل رابطهٔ تعریف را بنویسند. • معادلهٔ هایپربولا را با استفاده از رابطهٔ تعریف و فورمول فاصله بین دو نقطه استخراج نمایند. • از دانش و مهارت کسب شده حظ برند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارت شکل هایپربولا صفحهٔ 29 و چارت فعالیت
توضیح ورودی (5) دقیقه	معلم محترم بعد اجرای فعالیت‌های مقدماتی، چارت ورودی را پیشروی صنف بیاویزد و توجه شاگردان را به عنوان و سؤال ورودی جلب نماید و مطرح کند که: هایپربولایی که رأس آن بالای محور x کمیات وضعیه قرار داشته باشد محراق‌های آن کجا موقعیت خواهد داشت؟ بعد از تفکر، شاید عده‌یی جواب دهند که بالای محور x، در غیر آن معلم خود چارت مربوط فعالیت را پیشروی صنف بیاویزد و محراق‌ها را که به روی محور x قرار دارند به آنها نشان دهد.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نماید تافعالیت صفحهٔ 29 کتاب درسی را به مشورت همدیگر انجام دهند؛ یعنی PF' و PF را دریافت و تفاضل آنها را نوشته در رابطهٔ تعریف $|PF'|-|PF|=2a$ قرار دهند و قراری که از موضوع پارابولا می‌دانند اطراف را مربع ساخته به ساده سازی معادله بپردازند. در نتیجه به دریافت معادلهٔ هایپربولا یعنی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ نایل خواهند شد.
- معلم از کار گروهی شاگردان نظارت کند، گروه‌های فعال را تشویق و ضعیفان را کمک و رهنمایی کند.
- معلم کوشش نماید که در ترکیب هر گروه شاگردان لایق و ضعیف موجود باشد.

تحکیم درس (7) دقیقه

- معلم جهت تحکیم بخشیدن درس مثال 1 صفحهٔ 31 کتاب درسی را با سهم گیری شاگردان در صنف کار کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم غرض ارزیابی دانش و مهارت شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. کی هایپربولا را تعریف می‌کند؟
2. کی معادلهٔ هایپربولا را می‌نویسد که رأس آن بالای محورهای کمیات وضعیه قرار داشته باشد؟

معلومات اضافی برای معلم

هرگاه معادلهٔ پارابولا شکل $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ را دارا باشد برای اثبات مجانب هایپربولا داریم:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2b^2-a^2x^2}{a^2b^2}=1$$

$$y^2b^2-a^2x^2=a^2b^2$$

$$-a^2x^2=a^2b^2-y^2b^2$$

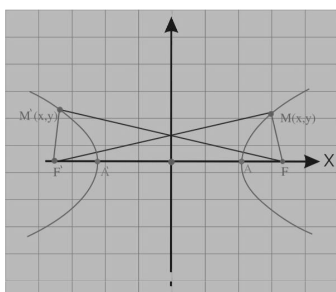
$$a^2x^2=y^2b^2-a^2b^2$$

$$a^2x^2=b^2(y^2-a^2)\quad,\quad x^2=\frac{b^2}{a^2}(y^2-a^2)$$

$$x^2=\frac{b^2}{a^2}\left[y^2(1-\frac{a^2}{y^2})\right]\quad,\quad x=\pm\frac{b}{a}y\sqrt{1-\frac{a^2}{y^2}}$$

در رابطهٔ فوق اگر y به طرف لایتناهی تقرب کند، کسر $\frac{a^2}{y^2}$ به طرف صفر تقرب می‌کند، بنابرآن رابطهٔ اخیر شکل زیر را به خود می‌گیرد:

معادلهٔ مجانب هایپربولا $x=\pm\frac{b}{a}y$ که محراق‌های آن بالای محور y قرار دارد.



فصل اول مقاطع مخروطی (Conic sections)

عنوان درس: معادلهٔ هایپربولا (حالت دوم)

صفحهٔ کتاب (30)

وقت تدریس (1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • فرق بین معادلهٔ هایپربولا یعنی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ و $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ را با در نظرداشت موقعیت محور قاطع (AA') بدانند. • ترسیم منحنی هایپربولا را در هر صورت فوق انجام دهند. • در صورت ضرورت از فورمول‌ها و اشکال هایپربولا استفاده کنند. • با عملی کردن موضوع‌های فوق‌الذکر احساس مسرت نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارت مربوط معلومات اضافی همین درس، چارت صفحهٔ 31 و 32 کتاب درسی
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، معادلهٔ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ را روی تخته بنویسد و شاگردی را وظیفه دهد تا منحنی آن را روی تخته رسم کند. حال چارت را که در معلومات اضافی تهیه گردیده است پیشروی صنف بیاویزد عناصر و اجزای آن را به شاگردان معرفی کند.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نماید تا معادلهٔ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ را با استفاده از چارت ذکر شده در مشورت باهم اثبات نمایند.

- معلم از کار و فعالیت گروه‌ها نظارت کند، گروه‌های فعال را تشویق و گروه‌های ضعیف را رهنمایی کند. در ختم فعالیت نمایندهٔ یک گروه را بخواهد تا کار گروهی خویش را به دیگران توضیح دهد در صورت داشتن مشکل یک شاگرد داوطلب از گروه دیگر به توضیح و اثبات معادلهٔ هایپربولا روی تخته بپردازد درصورت ضرورت معلم رهنمایی کند.

- معلم عنوان مجانب‌های هایپربولا را روی تخته بنویسد و از یک شاگرد بخواهد تا از معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ معادلهٔ مجانب را که عبارت از $y=\pm\frac{b}{a}x$ است اثبات نماید.

- معلم در هر قسمت سؤال نماید و شاگرد استدلال کند و جواب بدهد.

تحکیم درس (7) دقیقه

معلم برای تحکیم بخشیدن درس چارت صفحهٔ 31 کتاب درسی را که از قبل تهیه نموده است پیشروی صنف بیاویزد و شاگردی را بخواهد تا اجزای شکل را به همصنفان خود معرفی کند.

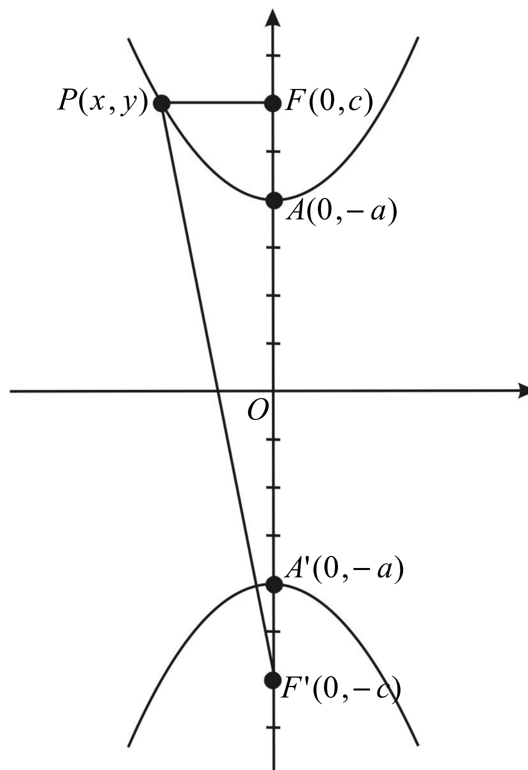
ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم جهت اطمینان خویش سؤالهای زیر را از شاگردان بپرسد:

1. هرگاه محور قاطع AA' روی محور y قرار داشته باشد معادلهٔ هایپربولا کدام است؟
2. کی فرمول عن‌المرکزیت را روی تخته می‌نویسد و اجزای آن را معرفی کند؟
3. هرگاه محور قاطع AA' روی محور y قرار داشته باشد مجانب هایپربولا چی شکلی را دارا خواهد بود؟

معلومات اضافی برای معلم

ثبوت حالت دوم



طبق تعریف هایپربولا، محل هندسی نقاطی که تفاضل فواصل شان از دو نقطهٔ داده شدهٔ مستقر، مساوی به یک طول ثابت باشد به نام هایپربولا یاد می‌شود؛ می‌نویسیم که:

$$|PF'|-|PF|=2a \;\; \dots \;\; I$$

از شکل می‌دانیم که:

$$|PF'|=\sqrt{(x-0)^2+(y-(-c)^2}$$

$$|PF|=\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}$$

قیمت‌ها را در رابطهٔ I به جایشان وضع می‌کنیم:

$$\sqrt{x^2+(y+c)^2}-\sqrt{x^2+(y-c)}=2a$$
$$\sqrt{x^2+y^2+2cy+c^2}-\sqrt{x^2+y^2-2cy+c^2}=2a$$
$$\sqrt{x^2+y^2+2cy+c^2}=2a+\sqrt{x^2+y^2-2cy+c^2}\ \ldots\ II$$

اطراف معادلهٔ II را مربع می‌سازیم:

$$x^2+y^2+2cy+c^2=4a^2+4a+\sqrt{x^2+y^2-2cy+c^2}+x^2+y^2-2cy+c^2$$
$$4cy-4a^2=4a\sqrt{x^2+y^2-2cy+c^2}\ \ldots\ III$$

اطراف رابطهٔ III را تقسیم 4 می‌کنیم:

$$cy-a^2=a\sqrt{x^2+y^2-2cy+c^2}\ \ldots\ IV$$

اطراف رابطهٔ IV را مربع می‌کنیم:

$$(cy-a^2)^2=a^2(x^2+y^2-2cy+c^2)$$
$$c^2y^2-2a^2cy+a^4=a^2x^2+a^2y^2-2a^2cy+a^2c^2$$
$$c^2y^2-a^2y^2-a^2x^2=-a^4+a^2c^2$$
$$y^2(c^2-a^2)-a^2x^2=a^2(c^2-a^2)$$

چون $c^2-a^2=b^2$ است؛ داریم: $y^2b^2-a^2x^2=a^2b^2$

اطراف معادلهٔ فوق را تقسیم a^2b^2 می‌کنیم:

$$\frac{y^2b^2}{a^2b^2}-\frac{a^2x^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$
$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1}$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 32

از معادلهٔ هایپربولای $4x^2-y^2=16$ کمیات وضعیهٔ محراق‌ها، رأس‌ها، معادلات خط موجه و معادلات مجانب‌ها را به دست آورده گراف آن را رسم نمایید.

حل نخست معادله را شکل معیاری می‌دهیم طوری که اطراف معادله را تقسیم 16 می‌کنیم:

$$4x^2-y^2=16\ \ /\div 16$$
$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$$

از معادلهٔ فوق فهمیده می‌شود که محور متقاطع هایپربولا، محور x می‌باشد و مرکز در مبدأ قرار دارد.

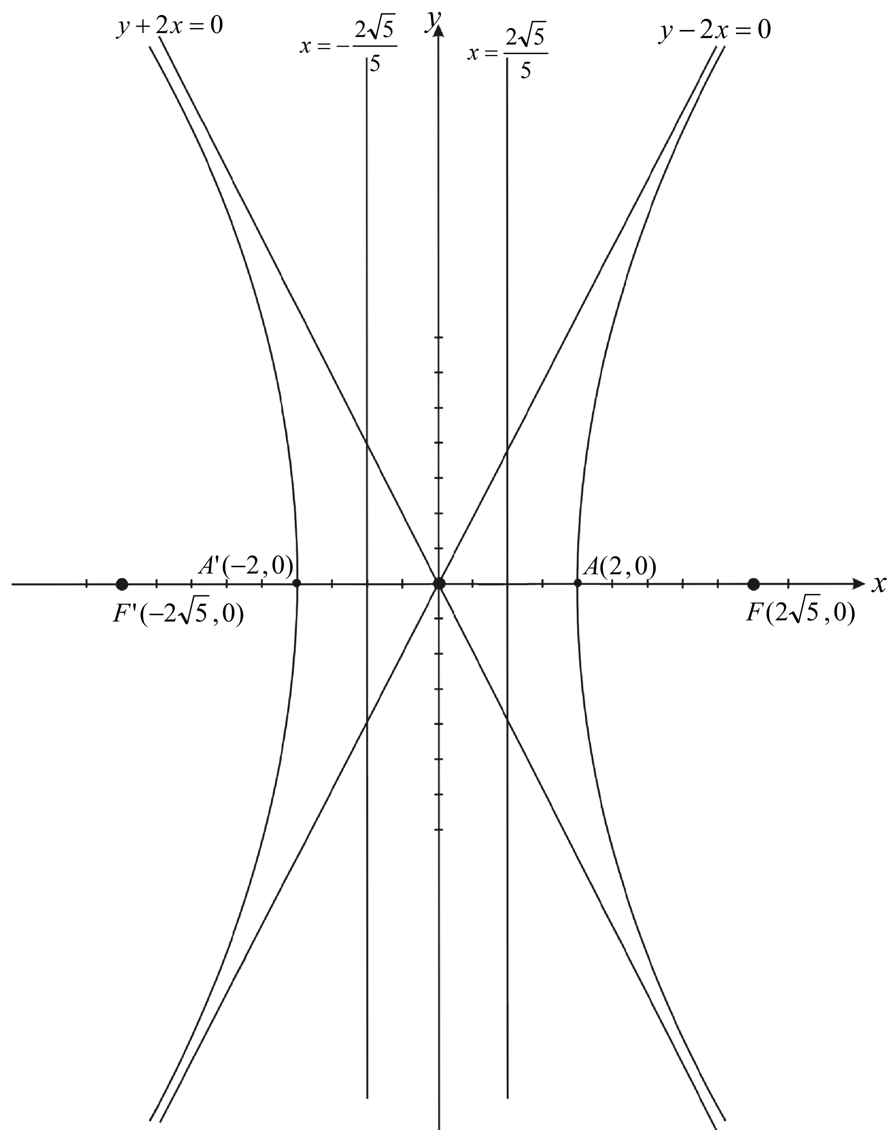
مختصات رأس‌ها $a^2=4\ \Rightarrow\ a=\pm 2\ ,\quad A(2,0)\ ,\ A'(-2,0)$

$$b^2=16\ \Rightarrow\ b=\pm 4\ ,\quad B(0,4)\ ,\quad B'(0,-4)$$
$$c^2=a^2+b^2\ \Rightarrow\ c^2=16+4=20$$
$$c=\pm 2\sqrt{5}$$

$F(c,0)=F(2\sqrt{5},0) \quad , \quad F'(-c,0)=F'(-2\sqrt{5},0)$ مختصات محراق‌ها

$y=\pm\frac{b}{a}x \;,\; y=\pm\frac{4}{2}x \;\Rightarrow\; 2y=\pm 4x \;,\; y+2x=0 \;,\; y-2x=0$ معادلهٔ مجانب‌ها

$x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{2^2}{2\sqrt{5}}=\pm\frac{4}{2\sqrt{5}}=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ معادلهٔ خطوط موجه



$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

فصل اول مقاطع مخروطی(*Conic sections*)

عنوان درس: معادلهٔ هایپربولا که مرکز آن یک نقطهٔ اختیاری باشد(حالت اول)

صفحهٔ کتاب (33)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

- اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • شکل معادلهٔ هایپربولایی را که مرکز آن یک نقطهٔ اختیاری باشد بدانند. • به رویت شکل و با در نظر داشت رابطهٔ تعریف معادلهٔ هایپربولا را به دست آورند. • مختصای محراق‌ها و رأس‌ها را از روی شکل تعیین کنند. • از اجرای موفقانهٔ مفاهیم فوق‌الذکر حظ ببرند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارت هایپربولای صفحهٔ 33
توضیح ورودی (5) دقیقه	معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس، سؤال ورودی را از شاگردان بپرسد، تا شاگردان در مورد سؤال تفکر کنند و خوب است تا شاگردان ابراز نظر نمایند. - معلم بعد از شنیدن نظریات شاگردان بگوید: همان صورتی که دیگر مقاطع مخروطی مانند بیضوی و پارابولا معادلات داشتند که مرکز شان منطبق مبدای کمیات وضعیه نبود همین قسم هایپربولا هم یکی از مقاطع مخروطی است که می‌تواند دارای معادلاتی باشد که مرکز آن درمبدای کمیات وضعیه نباشد.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نماید تا فعالیت را در گروه‌های شان انجام دهند. هرگاه شاگردان در فعالیت متذکره نتوانستند به ترسیم شکل هایپربولا موفق شوند، آنگاه چارت تهیه شده را پیشروی صنف بیاویزد و هدایت دهد تا به رویت آن گروه‌ها معادلهٔ هایپربولا را دریافت کنند.
- معلم از جریان فعالیت شاگردان نظارت کند، گروه‌های فعال را تشویق و ضعیفان را کمک نماید.

تحکیم درس (7) دقیقه

برای اینکه درس تحکیم یابد معلم نمایندهٔ یک گروه را بخواهد تا کار گروه خویش را به دیگران توضیح دهد.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم جهت اطمینان خویش سؤالهای زیر را از شاگردان بپرسد:

1. کی معادلۀ هایپربولایی را می‌نویسد که مرکز آن در مبدای کمیات وضعیه باشد؟
2. کی معادلۀ هایپربولایی را می‌نویسد که مرکز آن در مبدای کمیات وضعیه نباشد؟
3. کی می‌تواند با استفاده از شکل در معادلۀ $|PF'|-|P'F|=2a$ قیمت‌های PF' و PF را جابه جا کند؟

معلومات اضافی برای معلم

برای دریافت معادلات مجانب‌ها معادلۀ هایپربولا ($\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$) را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad , \qquad \frac{b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2}{a^2b^2}=1$$

$$b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2 \quad , \quad -a^2(y-k)^2=a^2b^2-b^2(x-h)^2$$

$$a^2(y-k)^2=b^2(x-h)^2-a^2b^2 \quad , \quad (y-k)^2=\frac{b^2}{a^2}(x-h)^2-b^2$$

یا

$$(y-k)^2=\frac{b^2}{a^2}(x-h)^2\left\{1-\frac{a^2}{(x-h)^2}\right\}$$

در رابطۀ فوق اگر x به طرف لایتناهی برود و حد $\frac{a^2}{(x-h)^2}$ به طرف صفر تقرب می‌کند؛ بنا بر آن از معادلۀ فوق داریم که:

$$(y-k)^2=\frac{b^2}{a^2}(x-h)^2$$

از اطراف معادلۀ فوق جذر دوم را می‌گیریم: $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$

معادلۀ مجانب‌ها $\boxed{y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k}$

فصل اول مقاطع مخروطی (Conic sections)

عنوان درس: معادلهٔ هایپربولا که محراق‌های آن روی محور y' قرار داشته باشند(حالت دوم)

صفحهٔ کتاب (35)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر باشند تا: • شکل هایپربولا را که محراق‌های آن روی محور y' باشند تجسم کنند. • تحت شرط داده شده مختصات رأس‌ها، محراق‌ها و معادلات مجانب‌های آن را تعیین کنند. • معادلهٔ آن یعنی $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ را استخراج نمایند. • از کسب دانش و مهارت‌های فوق به کسب دانش ریاضی علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارت هایپربولای صفحهٔ 35 کتاب درسی
توضیح ورودی (5) دقیقه	برای ورودی حالت دوم، همان ورودی حالت اول صدق می‌کند.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم بعد از نوشتن معادلهٔ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ روی تخته، به معرفی جزئیات شکل بپردازد و در مورد معادلهٔ $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ تبصرهٔ مختصر نماید.

- معلم مثال 1 صفحهٔ 35 کتاب درسی را به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند.

- معلم معادلهٔ $2x^2-8x-3y^2-18y-31=0$ مربوط به مثال دوم صفحهٔ 36 را روی تخته بنویسد و یک شاگرد را بخواهد تا آن را روی تخته به دست آورد. همزمان عین مثال را شاگردان دیگر(بدون استفاده از کتاب) در کتابچه‌های خویش حل کنند. در ختم شاگرد روی تخته فعالیت خویش را به دیگران توضیح دهد، شاگردان دیگر حل‌های خویش را به آن مقایسه و در صورت اشتباه به رفع اشتباه خویش بپردازند.

تحکیم درس (7) دقیقه

برای اینکه درس تحکیم یابد معلم نمایندهٔ یک گروه را بخواهد تا کار گروه خویش را به دیگران توضیح دهد.

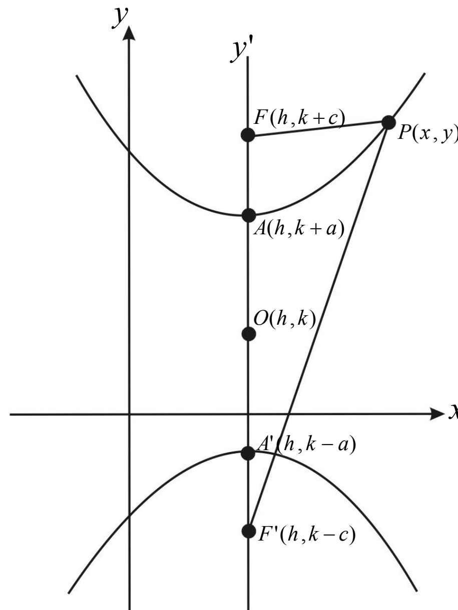
ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را توسط سؤالات ذیل ارزیابی کند:

1. کی فرق دو معادلهٔ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ و $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ را گفته می‌تواند؟
2. کی میتواند شکلهای دو معادلهٔ فوق را طور مختصر مقایسه کند؟

معلومات اضافی برای معلم

ثبوت معادلۀ حالت دوم هایپربولا



$A(h,k+a)$

$A'(h,k-a)$

$F(h,k+c)$

$F'(h,k-c)$

$P(x,y)$

$|PF|-|PF'|=2a$

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+c))^2}-\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2}=2a$$

$$(\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+c))^2})^2=(2a+\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2})^2$$

$$(x-h)^2+(y-(k+c))^2=4a^2+2\cdot 2a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2}+(x-h)^2+(y-(k-c))^2$$

$$y^2-2y(k+c)+(k+c)^2=4a^2+4a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2}+y^2-2y(k-c)+(k-c)^2$$

$$-2yk-2yc+k^2+2kc+c^2=4a^2+4a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2}-2yk+2yc+k^2-2kc+c^2$$

$$-2yc+2kc=4a^2+4a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2}+2yc-2kc$$

$$-4yc+4kc-4a^2=4a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2} \quad /\div 4$$

$$-yc+kc-a^2=a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2}$$

$$-c(y-k)-a^2=a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2} \qquad /\cdot(-1)$$

$$(c(y-k)+a^2)^2=(-a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2})^2$$

$$c^2(y-k)^2+2ca^2(y-k)+a^4=a^2\left[(x-h)^2+(y-(k-c))^2\right]$$

$$c^2(y-k)^2+2ca^2(y-k)+a^4=a^2(x-h)^2+a^2\left[y^2-2y(k-c)+(k-c)^2\right]$$

$$c^2(y-k)^2-a^2(x-h)^2=a^2y^2-2a^2y(k-c)+a^2(k-c)^2-2a^2c(y-k)-a^4$$

$$=a^2y^2-2a^2yk+2a^2yc+a^2(k-c)^2-2a^2yc+2a^2ck-a^4$$

$$=a^2y^2-2a^2yk+a^2\left[k^2-2kc+c^2\right]+2a^2ck-a^4$$

$$=a^2y^2-2a^2yk+a^2k^2-2a^2kc+a^2c^2+2a^2ck-a^4$$

$$=a^2y^2-2a^2yk+a^2k^2+a^2c^2-a^4$$

$$=a^2y^2-2a^2yk+a^2k^2+a^2(c^2-a^2)$$

چون: $b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$ است؛ پس:

$$c^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2[y^2 - 2yk + k^2] + a^2b^2$$
$$c^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2(y-k)^2 + a^2b^2$$
$$(a^2+b^2)(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2(y-k)^2 + a^2b^2$$
$$a^2(y-k)^2 + b^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2(y-k)^2 + a^2b^2$$
$$b^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2b^2 \quad / \div a^2b^2$$
$$\frac{b^2(y-k)^2}{a^2b^2} - \frac{a^2(x-h)^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

معادلۀ حالت دوم هایپربولا: $\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1}$

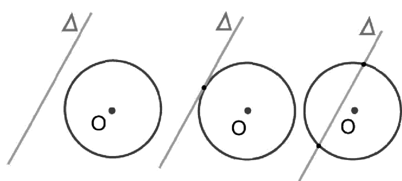
جواب به سؤال های تمرین صفحۀ 38

معادلۀ $9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y - 79 = 0$ را به معادله معیاری هایپربولا تبدیل کنید.

حل: از روی معادلۀ فوق معلوم می‌شود که $A \neq B$ و مختلف‌الاشاره اند.

$$9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y - 79 = 0$$
$$9(x^2 + 6x) - 4(y^2 - 4y) - 79 = 0$$
$$9(x^2 + 6x + 9 - 9) - 4(y^2 - 4y + 4 - 4) - 79 = 0$$
$$9(x+3)^2 - 81 - 4(y-2)^2 + 16 - 79 = 0$$
$$9(x+3)^2 - 4(y-2)^2 = 144 \quad / \div 144$$
$$\frac{9(x+3)^2}{144} - \frac{4(y-2)^2}{144} = 1$$

$\boxed{\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{36} = 1}$ معادلۀ معیاری هایپربولا



فصل اول مقاطع مخروطی (*Conic sections*)

عنوان درس: حالات نسبی یک خط مستقیم نظر به مقاطع مخروطی

صفحهٔ کتاب (39)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم حالات نسبی یک خط مستقیم را نظر به مقاطع مخروطی بدانند. • معادلهٔ دایره و معادلهٔ یک خط مستقیم را بشناسند. • منحنی‌های دایره و خط مستقیم را بااستفاده از معادله‌های شان ترسیم نموده بتوانند. • موقعیت دایره با یک خط مستقیم را طبق اوصاف شان تعیین کرده بتوانند. • بالآخره از کسب دانش و مهارت‌های فوق حظ ببرند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارت‌های صفحات 39-42 کتاب درسی
توضیح ورودی (5) دقیقه	معلم محترم سؤال ورودی را از شاگردان بپرسد تا آنها در رابطه به حالات دایره و یک خط مستقیم تفکر نمایند و نظر بدهند، البته بعد از اجرای فعالیت به حل سؤال ورودی نایل می‌آیند.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم بعد از شنیدن نظریات شاگردان چارت اشکال صفحهٔ 39 را پیشروی صنف بیاویزد، شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 39 کتاب درسی را انجام دهند. در اخیر نمایندهٔ یک گروه را بخواهد تا کار و فعالیت گروهی خویش را به دیگران توضیح نماید، در صورت اشتباه معلم کمک کند تا شاگردانی که به اشتباه رفته اند اشتباه خویش را مرفوع سازند.

- معلم یک شاگرد داوطلب را پیشروی صنف بخواهد تا دایرهٔ $x^2 + y^2 = 9$ را در سیستم مختصات قایم ترسیم نماید.

- معلم از یک شاگرد داوطلب دیگر بخواهد تا خط مستقیم $y = x + 3$ را نیز ترسیم نماید، از شاگردان بپرسد که خط مستقیم دایره را در چند نقطه قطع کرد.

بعد از گرفتن جواب به حل مثال اول کتاب درسی به شیوهٔ سؤال جواب بپردازد.

- معلم مثال دوم کتاب درسی را، درحالی که در هر قسمت از شاگردان سؤال می‌کند و جواب می‌گیرد(شاگردان را در حل مثال سهیم می‌سازد) حل کند.

- معلم یک شاگرد داوطلب را بخواهد تا مثال سوم را رو تخته حل کند، همزمان مثال مذکور را شاگردان دیگر(بدون استفاده از کتاب) در کتابچه‌های خویش حل کنند.

در اخیر شاگرد روی تخته فعالیت خویش را به دیگران توضیح کند و شاگردان دیگر حل‌های خویش را با آن مقایسه و در صورت اشتباه، به رفع آن پرداخته شود.

تحکیم درس (7) دقیقه

- معلم برای تحکیم درس مثال چهارم کتاب درسی را به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند و در ضمن معادلهٔ $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ را روی تخته بنویسد و مناقشه نماید که در کدام صورت معادلهٔ فوق دایره را، در کدام صورت بیضوی را، در کدام صورت هایپربولا را ارائه می‌کند، همچنان معادلهٔ پارابولا چی شکلی را خواهد داشت؟

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

- معلم برای متیقن شدن از آموزش شاگردان، سؤالهای زیر را مطرح کند:

1. یک خط مستقیم با هریک از مقاطع مخروطی چند حالت را دارا می‌باشد؟
2. اگر $\Delta = 0$ باشد، آیا خط مستقیم دایره را قطع می‌کند یا خیر اگر می‌کند در چند نقطه؟
3. درکدام صورت خط مستقیم با یکی از مقاطع مخروطی در یک نقطه متقاطع می‌باشد؟

فصل اول مقاطع مخروطی(Conic section)

عنوان درس:تمرینات

صفحهٔ کتاب (42)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: 1- هر یک مقاطع مخروطی(دایره، بیضوی، پارابولا، و هایپربولا) را از روی معادلات شان تشخیص دهند. 2- سؤالهای مربوط را حل کنند. 3- از حل سؤالها اعتماد به نفس پیدا کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارت‌های صفحات39-42 کتاب درسی
توضیح ورودی (5) دقیقه	

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم جزء a سؤال 1 صفحهٔ 42 کتاب درسی رابه شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند.
- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا جزء b سؤال 1 را در گروه‌های شان حل؛ سپس توسط نمایندهٔ یک گروه در مورد اجرای فعالیت شان توضیح بخواهد تا دیگران در روشنایی قرار گیرند.
- معلم جزء c سؤال شماره 1 را به یک شاگرد بدهد تا روی تخته حل کند، همزمان عین سؤال را به دیگران نیز بدهد تا در کتابچه‌های خویش به صورت انفرادی حل کنند، در عین حال مراقبت به عمل آید تا از روی تخته نقل نکنند. شاگرد روی تخته حل خویش را به دیگران توضیح دهد اگر کدام اشتباهی موجود باشد معلم کمک و رهنمایی کند تا شاگردان دیگر، اشتباهات خویش را اصلاح کنند.

در صورتی که سؤال‌ها در یک ساعت درسی حل نشود به ساعت دیگر درسی ریاضی به همین منوال سؤال‌های باقیمانده کار شود.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 42

1. نوعیت معادلات داده شدهٔ زیر را بعد از ترسیم گراف آنها را مشخص کنید.

$a)\ y^2-2y+x+3=0$ $\quad b)\ 9x^2+9y^2=27$ $\quad c)\ 25x^2+16y^2=400$

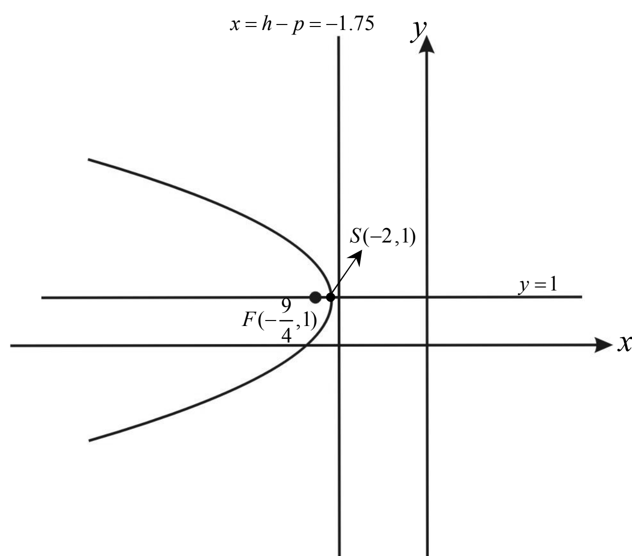
$d)\ x^2-y^2=0$ $\quad e)\ y^2+6y-x+2=0$

حل a): قبل از اینکه به حل سؤال پرداخته شود نخست باید تمام اجزا تکمیل مربع شوند؛ زیرا در تشخیص منحنی کمک می‌نمایند.

$$y^2-2y+1-1+x+3=0$$
$$(y-1)^2+x+2=0 \;\Rightarrow\; (y-1)^2=-(x+2)$$

معادلهٔ فوق معادلهٔ پارابولاییست که مرکز آن $(-2,1)$ بوده و $4P=-1$ یا $P=-\frac{1}{4}<0$ بنابرآن محراق پارابولا روی خطی که موازی محور x است قرار دارد و دهن آن به طرف چپ باز می‌باشد.

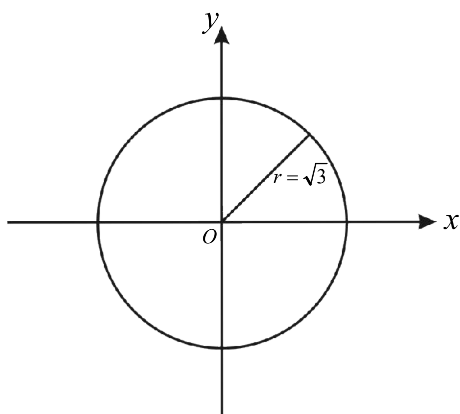
$$F(h+p,k)=F(-2-\frac{1}{4},1)=F(-\frac{9}{4},1)$$



حل b):

$$9x^2+9y=27$$
$$9(x^2+y^2)=27 \quad /\div 9$$
$$x^2+y^2=3$$

معادلهٔ فوق معادلهٔ دایره‌یی است که مرکز آن در مبدای کمیات وضعیه واقع بوده و شعاع آن $r=\sqrt{3}$ می‌باشد.



حل c):

$$25x^2+16y^2=400 \quad / \div 400$$

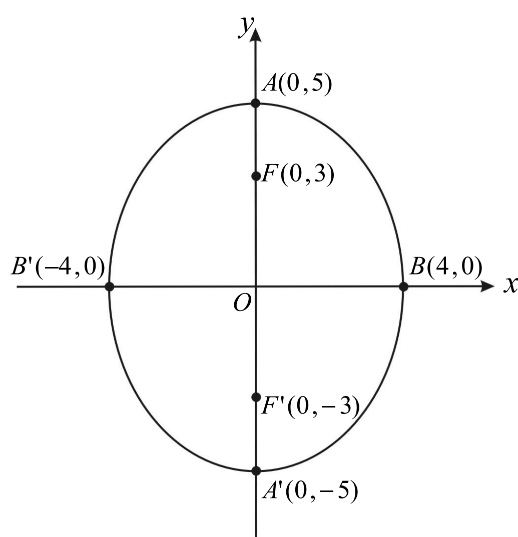
$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$$

معادلهٔ فوق معادلهٔ بیضوی ایست که مرکز آن در مبدای کمیات وضعیه و قطر اطول آن روی محور y می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} a^2=25 \ , \quad a=\pm 5 \\ b^2=16 \ , \quad b=\pm 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c^2=a^2-b^2 \\ c^2=25-16=9 \ , \quad c=\pm 3 \end{array}$$

$$|AA'|=2a=10 \ , \quad |BB'|=2b=8 \ , \quad |FF'|=6$$

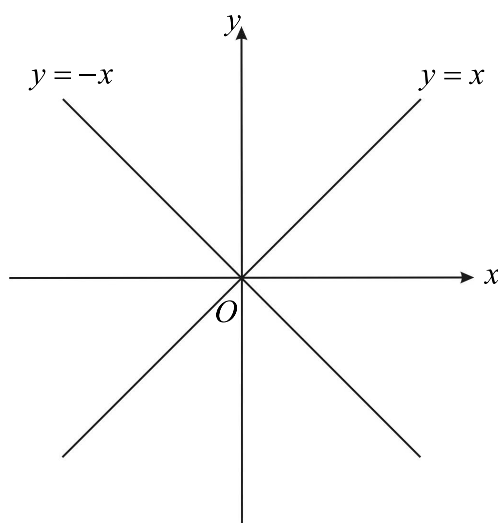
$$A(0,5) \ , \quad A'(0,-5) \ , \quad B(4,0) \ , \quad B'(-4,0) \ , \quad F(0,3) \ , \quad F'(0,-3)$$



حل d):

$$x^2-y^2=0$$

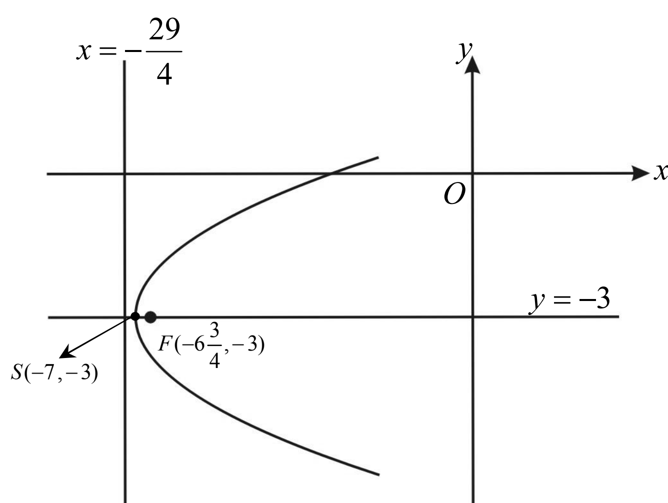
$$-y^2=-x^2 \quad \Rightarrow \quad y^2=x^2 \ , \quad y=\pm x$$



حل e):

$$y^2+6y-x+2=0$$
$$y^2+6y+9-9-x+2=0$$
$$(y+3)^2-(x+7)=0$$
$$(y+3)^2=x+7$$

معادلهٔ فوق معادلهٔ پارابولاییست که رأس آن در نقطهٔ $(-7,-3)$ واقع می‌باشد؛ چون $4p=1$ یا $p=\frac{1}{4}>0$ است؛ پس دهن پارابولا روی محور x به طرف راست باز می‌باشد و محراق آن $F(h+p,k)$ یا $F(-6\frac{3}{4},-3)$

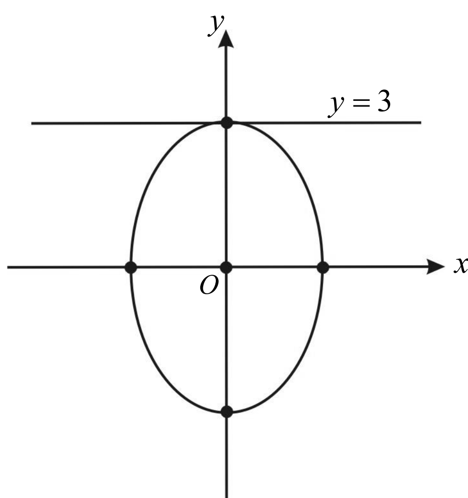


2. بیضوی $9x^2+4y^2=36$ و خط مستقیم $y=3$ در چند نقطه یکدیگر را قطع می کنند؟

حل:

$$9x^2+4y^2=36$$
$$9x^2+4(3)^2=36$$
$$9x^2+36=36$$
$$9x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

در نتیجه فهمیده می‌شود که خط مستقیم $y=3$ با بیضوی مماس است و نقطهٔ تقاطع خط با بیضوی عبارت از $(0,3)$ می باشد.



3. نقطه و یا نقاط تقاطع هایپربولای $x^2 - 2y^2 = 4$ و خط $y = x$ را دریافت کنید.

حل:

$$y^2 - 2y^2 = 4$$

$$-y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y^2 = -4$$

چون y^2 یکعدد منفی است؛ پس معادله حل ندارد و در نتیجه هایپربولا و خط $y = x$ یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

حل تمرینات عمومی فصل اول(7 ساعت درسی)

برای هر سؤال چهار جواب داده شده است، جواب صحیح را دریافت و دور آن را حلقه نمایید.

1. مستوی که به‌طور مایل مخروط را قطع کند، فصل مشترک مستوی و مخروط عبارت است از:

(a)- بیضوی　　b- دایره　　c- هایپربولا　　d- دو خط متقاطع

2. محراق های بیضوی نقاطی اند که از مرکز بیضوی:

(a)- فاصله‌های مساوی دارند.　　b- فاصله های مختلف دارند.

c- به اندازهٔ نصف قطر بزرگ فاصله دارند.　　d- به اندازهٔ نصف قطر کوچک فاصله دارند.

3. اگر M یک نقطهٔ بیضوی، F و F′ محراق‌ها و 2a طول قطر بزرگ آن باشد. در این صورت داریم که:

$a)\ |MF|-|MF'|=2a$　　$b)\ |MF|+|MF'|=a$

(c) $|MF|+|MF'|=2a$　　$d)\ |MF'|+|MF|=0$

4. عن المرکزیت یک بیضوی توسط کدام رابطهٔ زیر به دست می آید؟

$a)\ e=\frac{a}{c}$　　(b) $e=\frac{c}{a}$　　$c)\ e=\frac{b}{c}$　　$d)\ e=\frac{c}{b}$

5. در بیضوی رابطه بین فاصلهٔ محراقی و قطر صغیر وقطر کبیر عبارت است از:

$a)\ a^2=b^2-e^2$　　$b)\ a^2+b^2=c^2$

$c)\ a^2=b^2+e^2$　　(d) $a^2=b^2+c^2$

6. در معادلهٔ $(y-k)^2=4p(x-h)$ اگر $P>0$ باشد.

a- پارابول به طرف بالا باز است.　　b- پارابولا به طرف پایین باز است.

(c)- به طرف راست باز است.　　d- به طرف چپ باز است.

7. هرگاه معادلهٔ پارابولای $(x+1)^2=8(y-2)$ را داشته باشیم، کمیات وضعیهٔ محراق آن عبارت است از:

$a)\ F(-1-2)$　　(b) $F(-1,\ 4)$　　$c)\ F(-1,\ 2)$　　$d)\ F(4,-1)$

8- اگر نقاط F و F' محراق های هایپرابولا باشد تحت کدام شرط نقطه P یک نقطه از محیط هایپرابولا بوده می تواند؟

$a)\ |PF|+|PF'|=2a$　　$b)\ |PF|-|PF'|=2a$　　$c)\ |PF|-|PF'|=a$　　$d)\ |PF|-|PF'|=o$

9. گراف پارابولای $y=x^2$ نظر به کدام محور متناظر است ؟

(a)- نظر به محور y　　b- نظر به محور x

c- نظر به محور x و y　　d- نظر به مبدأ کمیات وضعیه

10. کدام یکی از جوابات زیر عن‌المرکزیت هایپربولا را نشان می دهد؟

$a)\ e<1$　　$b)\ e=-1$　　(c) $e>1$　　$d)\ e=1$

11. موقعیت قطر اطول بیضوی $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ عبارت اند از:

a- بالای محور y　　(b)- بالای محور x

c- موازی به محور x　　d- موازی به محور y

12. محل هندسی نقاطی که در یک مستوی از یک نقطهٔ ثابت متساوی الفاصله است به چی نام یاد می شود؟

a- کره

b- دایره (انتخاب شده)

c- پارابولا

d- بیضوی

13. کمیات وضعیهٔ رأس پارابولای $y^2 = -4(x+2)$ عبارت است از:

$a)\ (2,4)$ $\quad b)\ (4,2)$ $\quad c)\ (2,0)$ $\quad$ ⓓ $(-2,0)$

14. معادلهٔ $4x^2 + 4y^2 + 8y + 3 = 0$ به کدام یک از مقاطع مخروطی تعلق دارد:

a- دایره (انتخاب شده)

b- بیضوی

c- پارابولا

d- هایپربولا

سؤالهای زیر ر ا حل نمایید:

1- معادلات زیر را در نظر گرفته، نخست آن ها را به حالت‌های معیاری نوشته؛ سپس گراف آن ها را رسم نمایید:

$a)\ x^2 + 4y^2 = 4$ $\qquad b)\ 9x^2 + 2y^2 = 15$

$c)\ 16x^2 - 96x + 9y^2 + 90y + 225 = 0$ $\qquad d)\ x^2 + 12x - 120y + 288 = 0$

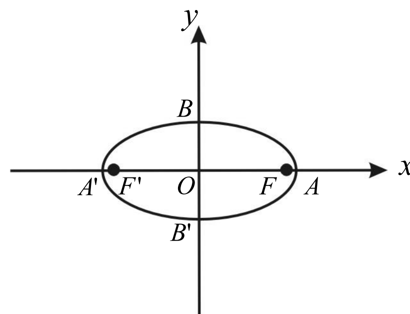
حل):

$a)\ x^2 + 4y^2 = 4 \quad / \div 4$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

معادلهٔ فوق معادلهٔ بیضوی است که مرکز آن در مبدأ و محور محراقی آن محور x است. برای ترسیم گراف، مرکز، محراق‌ها قطر طویل و قطر صغیر را پیدا می کنیم:

$$a^2 = 4 \ , \quad a = \pm 2 \ , \quad A(2,0) \ , \quad A'(-2,0)$$
$$b^2 = 1 \ , \quad b = \pm 1 \ , \quad B(0,1) \ , \quad B'(0,-1)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = 4 - 1 = 3 \ \Rightarrow \ c = \pm\sqrt{3} = \pm 1.73$$
$$\left.\begin{matrix} F(c,0) = F(\sqrt{3},0) \\ F'(-c,0) = F'(-\sqrt{3},0) \end{matrix}\right\} \text{محراق‌ها}$$
$$|AA'| = 2a = 2 \cdot 2 = 4$$
$$|BB'| = 2b = 2 \cdot 1 = 2$$
$$|FF'| = 2c = 2\sqrt{3}$$



$b)\ 9x^2 + 2y^2 = 15$

حل):

معلوم می‌شود که $A \neq B$ بوده؛ لیکن هم اشاره اند؛ بنا برآن معادلهٔ فوق، معادلهٔ بیضوی است و گراف آن را شاگردان ترسیم نمایند.

$c)\ 16x^2-96x+9y^2+90y+225=0$

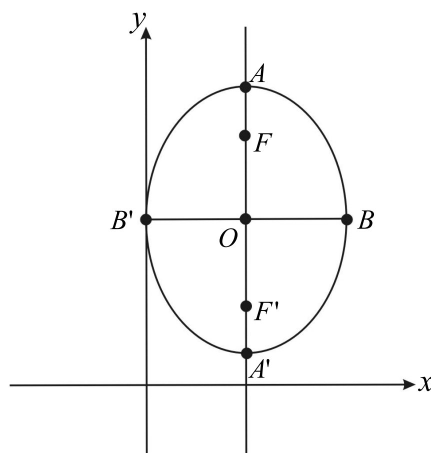
حل):

$$16(x^2-6x)+9(y^2-10y)+225=0$$
$$16(x^2-6x+9-9)+9(y^2-10y+25-25)+225=0$$
$$16(x-3)^2-144+9(y-5)^2-225+225=0$$
$$16(x-3)^2+9(y-5)^2=144$$
$$\frac{16(x-3)^2}{144}+\frac{9(y-5)^2}{144}=1$$
$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$$

طوری‌که دیده می‌شود مخرج $(y-5)^2$ بزرگ است، بنا بر آن محور محراقی بیضوی موازی به محور y می‌باشد.

مرکز بیضوی $(h,k)=(3,5)$

$$a^2=16\ ,\quad a=\pm4 \qquad A(h,k+a)=A(3,5+4)=A(3,9)$$
$$b^2=9\ ,\quad b=\pm3 \qquad A'(h,k-a)=A'(3,5-4)=A'(3,1)$$
$$B(h+b,k)=B(3+3,5)=B(6,5)$$
$$B'(h-b,k)=B'(3-3,5)=B'(0,5)$$
$$c=a^2-b^2=16-9=7\ ,\quad c=\pm\sqrt{7}$$
$$F(h,k+c)\quad ,\quad F(3,5+\sqrt{7})$$
$$F'(h,k-c)\quad ,\quad F'(3,\ 5-\sqrt{7})$$



$d)\ x^2+12x-120y+288=0$

حل)

$$x^2+12x+36-36-120y+288=0$$
$$(x+6)^2-120y+252=0$$
$$(x+6)^2=120y-252$$
$$(x+6)^2=120(y-2,1)$$

$h=-6 \quad , \quad k=2,1 \qquad S(h,k)=(-6,2.1)$ رأس پارابولا

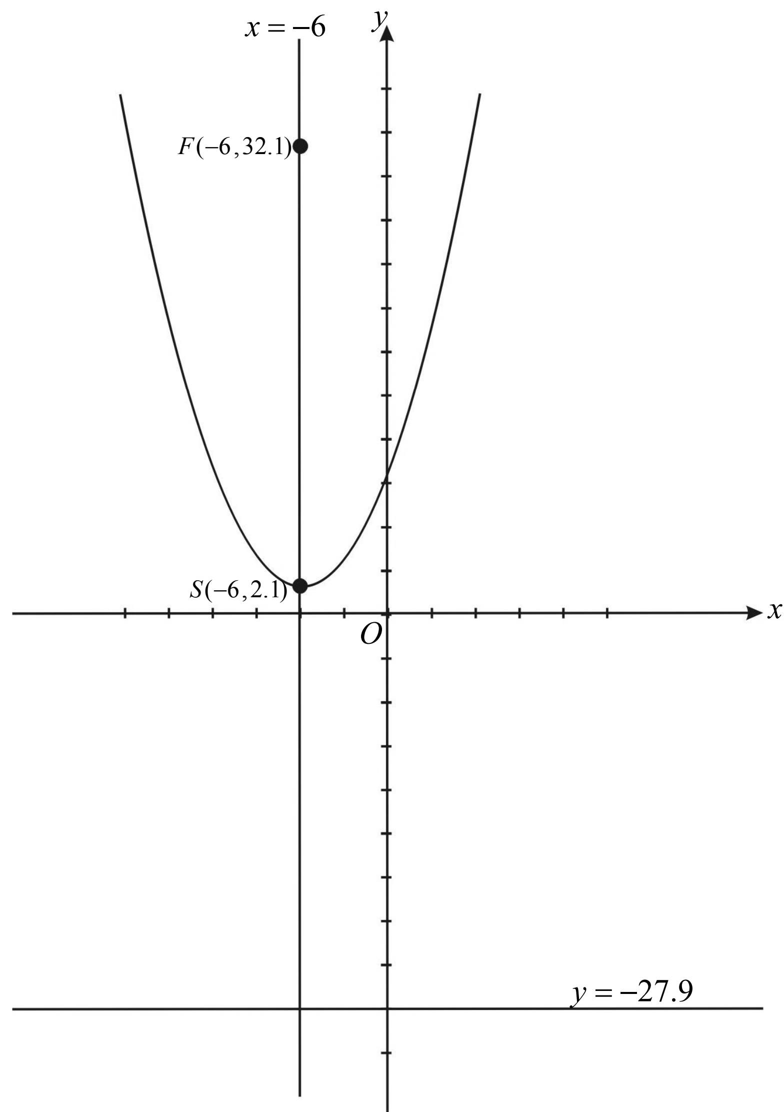
$4P=120 \;\Rightarrow\; P=30$

طوری‌که به ملاحظه میرسد $P>0$ بوده؛ پس دهن پارابولا به طرف قسمت فوقانی محور y باز است.

$F(h,k+p)=F(-6,2.1+30)=F(-6,32.1)$ محراق

$y=k-p=2.1-30=-27.9$ معادلهٔ خط موجه

$x=h=-6$ محور تناظر



2– مطابق شرایط داده شدهٔ زیر، معادلات بیضوی را دریابید:

a- مرکز آن $(0,0)$, $a=-2$, $e=0.5$ بوده و قطر بزرگ آن به امتداد محور y باشد.

b- مرکز آن $(0,0)$, $b=64$, $e=0.5$ بوده و قطر بزرگ آن به امتداد محور x باشد.

حل a: هرگاه نصف قطر بزرگ a باشد؛ پس:

$$a=2 \quad , \quad e=\frac{c}{a}=0.5 \quad , \quad c=a\cdot c=2\cdot 0.5 \quad , \quad c=1$$

$$a^2=b^2+c^2 \quad \Rightarrow b^2=a^2-c^2$$

$$b^2=4-1=3 \quad \Rightarrow b=\pm\sqrt{3}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1}$$

حل b:

$$e=0.5=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

$$c^2=a^2-b^2 \quad \Rightarrow b^2=a^2-c^2 \quad , \quad b^2=a^2-a^2e^2$$

$$b^2=a^2(1-e^2) \quad , \quad (64)^2=a^2\cdot(1-\frac{1}{4})=a^2(\frac{4-1}{4})$$

$$(64)^2=a^2(\frac{3}{4}) \quad \Rightarrow a^2=\frac{4}{3}(64)^2=\frac{(2\cdot 64)^2}{3}$$

$$\frac{x^2}{\frac{4\cdot(64)^2}{3}}+\frac{y^2}{(64)^2}=1 \qquad \text{یا} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

3- از معادلات زیر قطر کبیر، قطر صغیر، مختصات رؤوس و مختصات محراق‌های بیضوی را دریافت کنید.

$$a)\ 4(x-1)^2+y^2=4 \qquad b)\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

حل a):

$$4(x-1)^2+y^2=4\ /\ \div 4$$

$$(x-1)^2+\frac{y^2}{4}=1$$

قسمی‌که دیده می‌شود مخرج y^2 بزرگ است، بنا بر آن محور محراقی بیضوی(قطر طویل) با محور y موازی می‌باشد.

$$h=1 \quad , \quad k=0$$

مرکز بیضوی $(h,k)=(1,0)$

$$a^2=4 \quad \Rightarrow a=\pm 2$$

$$b^2=1 \quad \Rightarrow b=\pm 1$$

$$c^2=a^2-b^2=4-1=3 \quad \Rightarrow c=\pm\sqrt{3}$$

قطر طول بیضوی $|AA'|=2a=2\cdot 2=4$

$$|BB'|=2b=2\cdot 1=2$$

رأسهای قطر طویل بیضوی $(h,k+a)=(1,2)\ ,\ (h,k-a)=(1,0-2)=(1,-2)$

محراق‌های بیضوی $(h,k+c)=(1,\sqrt{3})\ ,\ (h,k-c)=(1,-\sqrt{3})$

مختصات رأسهای قطر صغیر $\left.\begin{array}{l}(h+b,k)=(1+1,0)=(2,0)\\(h-b,k)=(1-1,0)=(0,0)\end{array}\right\}$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

حل b):

باز هم دیده می‌شود که مخرج y^2 بزرگ است؛ بنابرآن محور محراقی بیضوی عبارت از محور y است.

$a^2=9 \Rightarrow a=\pm 3$

$b^2=4 \Rightarrow b=\pm 2$

$c^2=a^2-b^2=9-4=5$

$c=\pm 5$

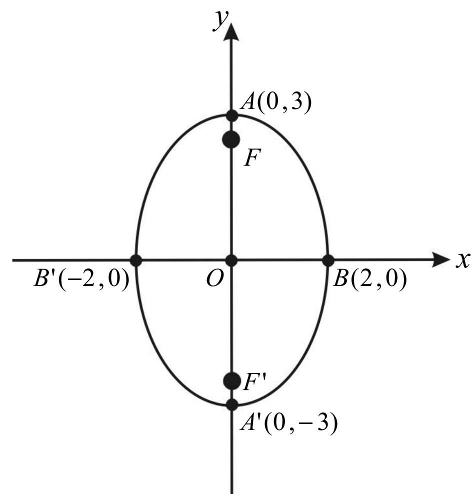
$\left.\begin{array}{l} A(0,a)=A(0,3) \\ A'(0,-a)=A'(0,-3) \end{array}\right\}$ مختصات رأسهای قطر کبیر بیضوی

$\left.\begin{array}{l} B(b,0)=(2,0) \\ B'(-b,0)=(-2,0) \end{array}\right\}$ مختصات رأس‌های قطر صغیر

$|AA'|=2a=2\cdot 3=6$ طول قطر طویل

$|BB'|=2b=2\cdot 2=4$ طول قطر صغیر

$\left.\begin{array}{l} F(0,c)=F(0,\sqrt{5}) \\ F'(0,-c)=F'(0,-5) \end{array}\right\}$ مختصات محراق‌های بیضوی



4- معادلات پارابولای زیر را به شکل معیاری آن آورده و گراف‌های آن ها را رسم نمایید.

$a)\ x^2-11y=0$ $\qquad b)\ y^2-4y-4x+20=0$

حل a):

$x^2-11y=0$

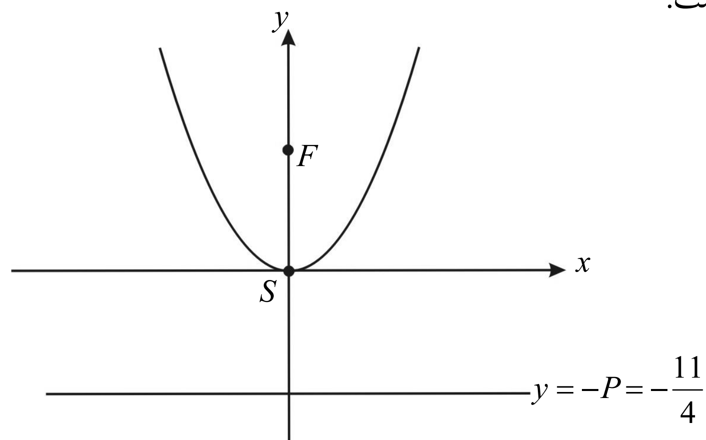
$x^2=4Py$

$x^2=-11y \ , \quad 4P=-11 \ \Rightarrow \ P=-\frac{11}{4}$

طوری‌که $P<0$ است؛ بنا برآن دهن پارابولا به طرف پایین محور y باز است و رأس آن در مبدأی کمیات وضعیه واقع است.

$F(0,p)=F(0,-\frac{11}{4}$ محراق

$y=-P=\frac{11}{4}$ معادلهٔ خط موجه



حل b):

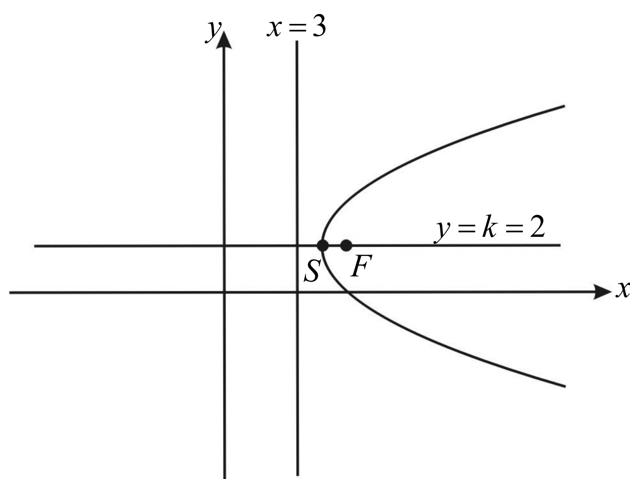
$$y^2-4y+4-4-4x+20=0$$
$$(y-2)^2-4x+16=0$$
$$(y-2)^2=4x-16$$
$$(y-2)^2=4(x-4)$$
$$4P=4 \quad , \qquad P=1>0$$

$S(h,k)=S(4,2)$ رأس پارابولا

$F(h+p,k)=F(4+1,2)=F(5,2)$ محراق

$x=h-p=4-1=3$ معادلهٔ خط موجه

$y=k=2$ محور تناظر



5- معادلات هر یک از هایپربولا های زیر را به شکل معیاری آن‌ها تبدیل نمایید.

$a)\ 4x^2-y^2-8y-32=0 \qquad\qquad b)\ 2y^2+4y-x^2+10x-25=0$

حل a):

$$-y^2-8y+4x^2-32=0 \ /\cdot(-1)$$
$$y^2+8y-4x^2+32=0$$
$$y^2+8y+16-16-4x^2+32=0$$
$$(y+4)^2-4x^2+16=0$$
$$(y+4)^2-4x^2=-16 \ /\div(-16)$$
$$\boxed{\frac{x^2}{4}-\frac{(y+4)^2}{16}=1}$$

حل b):

$$2(y^2+2y)-(x^2-10x)-25=0$$
$$2(y^2+2y+1-1)-(x^2-10x+25-25)-25=0$$
$$2(y+1)^2-2-(x-5)^2+25-25=0$$
$$2(y+1)^2-(x-5)^2=2 \ /\div 2$$
$$\boxed{(y+1)^2-\frac{(x-5)^2}{2}=1}$$

6- معادلهٔ هایپربولایی را تشکیل دهید که رأس های آن $(-4,0)$ و $(4,0)$ بوده و معادلات مجانب های آن $y=\pm\frac{5}{4}x$ باشند.

حل: می‌دانیم که معادلهٔ عمومی مجانب‌ها به شکل $y=\pm\frac{b}{a}x$ است، وقتی که محورمتقاطع هایپربولا موازی با محور x باشد.

$$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{5}{4}x \Rightarrow a=4 \quad , \quad b=5$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{یا} \quad \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$$

7- معادلهٔ هایپربولایی را تشکیل دهید که رأس های آن $(-1,3)(1,3)$ بوده و طول محراقی آن 4 واحد باشد.

حل:

$$h=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1-1}{2}=0 \qquad , \qquad k=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{3+3}{2}=3$$

$(h,k)=(0,3)$ مرکز هایپربولا

$$|FF'|=2c=4 \Rightarrow c=2$$

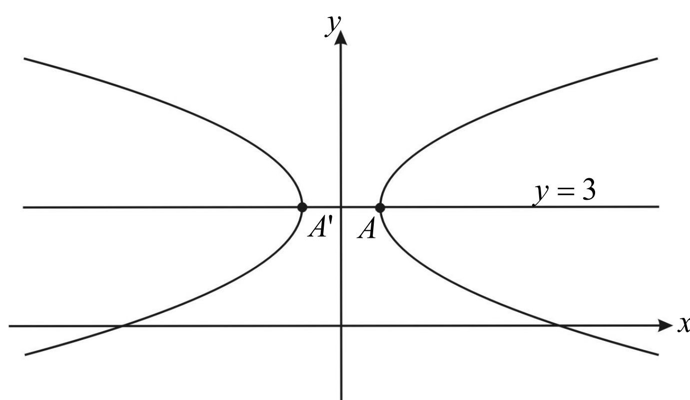
$$|AA'|=\sqrt{(1+1)^2+(3-3)^2}=2a$$

$$\sqrt{(2)^2}=2a \Rightarrow a=1$$

$$b^2=c^2-a^2=4-1=3 \Rightarrow b=\pm\sqrt{3}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\boxed{x^2-\frac{(y-k)^2}{3}=1}$$



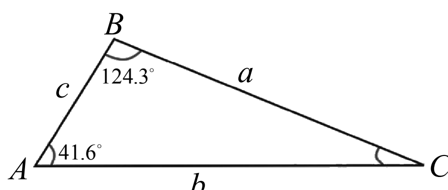
8- خط مستقیم $y=2x$ هایپربولای $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

حل:

$$\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{9}=1 \;/\cdot(36)$$
$$9(x+1)^2-4(y-2)^2=36$$
$$9(x^2+2x+1)-4(y^2-4y+4)=36$$
$$9x^2+18x+9-4(4x^2-8x+4)=36$$
$$-7x^2+50x-7=36$$
$$-7x^2+50x-43=0 \;/\cdot(-1)$$
$$7x^2-50x+43=0$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=2500-1204$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{1296}=\pm 36$$

طوری‌که $\Delta>0$ است؛ پس خط $y=2x$ هایپربولا را در دو نقطه قطع می‌کند.

فصل دوم مثلثات



عنوان درس: قانون ساین(Low of sine)

صفحهٔ کتاب (51)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم قانون ساین یک زاویه را درک کنند. • در صورت داشتن دو ضلع و یک زاویه و یا دو زاویه و یک ضلع اجزای دیگرمثلث را پیدا کنند. • با فراگیری دو موضوع فوق اعتماد به نفس پیدا کنند. • در هر مثلث قانون ساین را بتوانند به اثبات برسانند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارتهای اشکال مربوط هر درس به رنگ روشن و قابل دید، چارت سؤال ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس چارت سؤال ورودی را پیشروی صنف بیاویزد و سؤال ورودی را از شاگردان بپرسد تا در مورد حل آن تفکر کنند. در صورتی که شاگردان راه حلی را نتوانند ارائه نمایند، بعد از اجرای فعالیت و اثبات قضیهٔ ساین معلم به حل سؤال ورودی نایل می‌آید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 51 کتاب درسی را در مشورت باهم انجام دهند در ختم فعالیت نمایندهٔ یک گروه فعالیت گروهی خویش را به دیگران توضیح بدارد. در صورت عدم صحت بودن توضیح شاگرد، معلم با استفاده از چارت دوم صفحهٔ 51 کتاب درسی، در حالیکه شاگردان را سهم فعال میدهد قانون ساین را به اثبات برساند در نتیجه به حل سؤال ورودی نایل می‌شود.

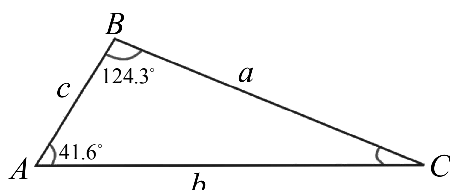
تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم غرض تحکیم بخشیدن درس، مثال اول صفحهٔ 53 کتاب درسی را به شیوهٔ سؤال و جواب حل کند.(چارت مثلث مربوط صفحهٔ فوق پیشروی صنف آویزان شود.)

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم غرض ارزیابی دانش و مهارت شاگردان، سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. از یک شاگرد پرسیده شود قضیهٔ ساین چی موضوعی را بیان می‌کند؟ فرمول آن را بنویسد.
2. شاگرد دیگری را بخواهد تا از روی تناسب $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ طول ضلع b را دریافت کند.



فصل دوم مثلثات

عنوان درس: ثبوت قضیهٔ ساین در مثلث منفرجالزاویه

صفحهٔ کتاب (52)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم قانون ساین را در مثلث منفرجالزاویه بدانند. • باداشتن دو ضلع و یک زاویه و یا یک ضلع و دو زاویه اجزای دیگر مثلث را دریافت کنند. • با مواجه شدن این موضوع در اجتماع، به حل معضله بپردازند. • با کسب دانش و مهارتهای فوق علاقمند دانش ریاضی شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارت صفحات 52-55
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی چارت مثلث منفرجالزاویهٔ مقابل را پیشروی صنف بیاویزد و از شاگردان بپرسد: آیامیتوان قضیهٔ ساین را در مثلث منفرجالزاویه به اثبات رسانید؟ - معلم بگذارد تا شاگردان تفکر کنند و جواب ارائه بدارند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

- معلم در صورت ناتوانی شاگردان به ارائه جواب درست، چارت صفحهٔ 52 کتاب درسی را پیشروی صنف بیاویزد و ترسیم ارتفاعات AD و CE را به ترتیب بالای امتداد ضلع a و بالای ضلع c طور مختصر به روی چارت نشان دهد و با شیوهٔ سؤال و جواب(سهم گیری شاگردان) رابطهٔ ساین را که عبارت از $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ است به دست آورد.

- معلم چارت صفحهٔ 54 کتاب درسی را پیشروی صنف بیاویزد.

- معلم از یک شاگرد بخواهد تا مثال 2 صفحهٔ مذکور را روی تخته حل کند. همزمان عین مثال را به شاگردان دیگر نیز بدهد تا به شکل انفرادی(بدون استفاده از کتاب درسی) در کتابچه‌های خویش حل کنند. در اخیر شاگرد روی تخته حل خویش را به دیگران توضیح دهد، هرگاه در حل وی اشتباهی دیده می‌شود شاگرد دیگری را بخواهد تا اشتباه وی را رفع کند.

- معلم در جریان فعالیت شاگردان را مراقبت کند تا از کتاب درسی استفاده ننمایند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم غرض تحکیم بخشیدن درس چارت صفحهٔ 55 کتاب درسی را پیشروی صنف بیاویزد و شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا مثال سوم صفحهٔ مذکور را به مشورت همدیگر حل کنند.(معلم به شاگردان ساین زوایایی را که ضرورت باشد بدهد.)
- معلم اجازه ندهد تا شاگردان در اجرای فعالیت گروهی از کتاب درسی استفاده کنند.

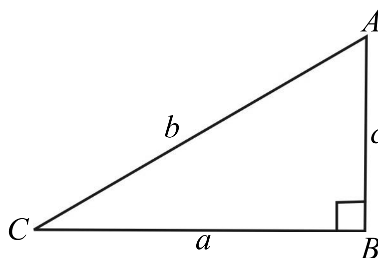
ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم غرض ارزیابی دانش و مهارت شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. آیا در مثلث‌های قایم‌الزاویه، حادالزاویه و منفرج‌الزاویه روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث فرق می‌کند یا خیر؟ رابطه را بنویسید.
2. در یک مثلث قایم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، اگر یک ضلع قایم آن $10cm$ طول داشته باشد زوایا و اضلاع مثلث را حساب کنید.

معلومات اضافی برای معلم

اثبات قانون ساین در مثلث قایم‌الزاویه:



$$\sin A = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\sin A} \ ...\ (1)$$

$$\sin C = \frac{c}{b} \Rightarrow b = \frac{c}{\sin C} \ ...\ (2)$$

$$\sin B = \frac{b}{b} \Rightarrow b = \frac{b}{\sin B} \ ...\ (3)$$

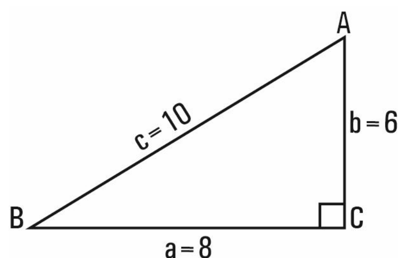
از مقایسهٔ روابط $(1),(2)$ و (3) داریم که:

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 56

1- اگر قیمت اضلاع مثلث قایم الزاویه $a = 8m$, $b = 6m$ و $c = 10m$ داده شده باشند اندازهٔ زاویه های آن را دریافت کنید.

حل:



$$\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}$$

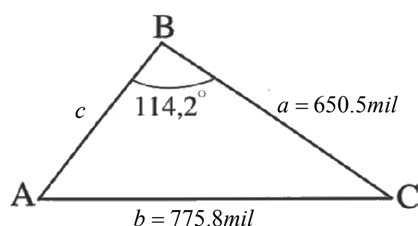
$$\frac{1}{10}=\frac{\sin B}{6}\Rightarrow \sin B=\frac{6}{10}\Rightarrow \hat{B}=37^\circ$$

$$\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin A}{a}$$

$$\frac{1}{10}=\frac{\sin A}{8}\Rightarrow \sin A=\frac{8}{10}$$

$$\hat{A}=53^\circ$$

2- شکل زیر را در نظر گرفته فاصله از شهر A تا شهر B را دریافت کنید.



حل: نظر به قانو ساین داریم که:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

$$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{650.5mil\cdot\sin 114.2^\circ}{775.8mil}=\frac{650.5\cdot 0.9121}{775.8}=0.764\ \Rightarrow\ \sin A=0.764$$

$$\hat{A}=49.8^\circ$$

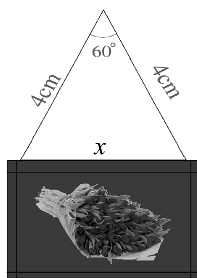
$$\hat{C}=180^\circ-(\hat{A}+\hat{B})=180^\circ-(49.8+114.2)=180^\circ-164.0$$

$$\hat{C}=16^\circ$$

$$c=\overline{AB}=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{775.8\cdot\sin 16^\circ}{\sin 114.2^\circ}=\frac{775.8\cdot 0.27}{0.9121}$$

$$c=\overline{AB}=\frac{209.46}{0.9121}=229.6mil$$

$$\boxed{c=229.6mil}$$



فصل دوم مثلثات

عنوان درس: قانون کوساین

صفحهٔ کتاب (57)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • قانون کوساین را با فرمول آن بدانند. • با داشتن یک زاویه و دو ضلع مجاور آن، ضلع سوم مثلث را دریافت کنند و همچنان در صورت داشتن دو ضلع مثلث، زاویه بین دو ضلع مجاور یک مثلث را دریافت کنند. • از آموزش قانون فوق احساس خوشنودی کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارت شکل سؤال ورودی و چارت اشکال صفحات 57-60
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس، چارت سؤال ورودی را پیشروی صنف بیاویزد و سؤال ورودی را طرح کند تا شاگردان در مورد آن فکر کنند و ابراز نظر نمایند، در صورتی که راه حلی را دریافت نتوانند در نتیجهٔ انجام فعالیت به حل آن موفق خواهند گردید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

- معلم چارت شکل دوم صفحهٔ 57 را پیشروی تخته آویزان کند.
- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت را در مشورت باهم اجرا کنند.
- معلم از اجرای فعالیت گروه‌ها نظارت به عمل آورده گروه‌های فعال را تشویق و گروه‌های ضعیف را کمک و رهنمایی کند.

در ختم فعالیت نمایندهٔ یک گروه فعالیت خویش را روی تخته به دیگران توضیح دهد، در صورت صحت بودن گروه‌هایی که به اشتباه رفته اند، اشتباه‌های خود را اصلاح کنند.

- معلم مثال 1 صفحهٔ 59 را به شیوهٔ سؤال و جواب توسط شاگردان حل نماید.
- معلم یک شاگرد را وظیفه دهد تا مثال 2 صفحهٔ 59 کتاب درسی را روی تخته حل کند، همزمان عین مثال را شاگردان دیگر در کتابچه‌های خویش حل کنند(بدون این که از کتاب درسی استفاده نمایند). در اخیر شاگرد به روی تخته فعالیت خویش را به دیگران توضیح دهد، در صورتی که درست حل شده باشد شاگردانی که مرتکب اشتباه شده اند، اشتباه را رفع نمایند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم غرض تحکیم بخشیدن درس مثال 3 صفحهٔ 59 کتاب درسی رابه شیوهٔ سؤال و جواب توسط یک شاگرد حل کند.

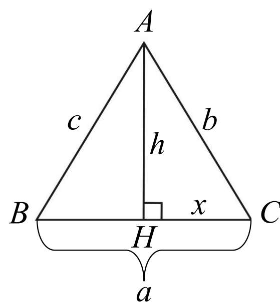
ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

معلم غرض ارزیابی دانش و مهارت شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. یک شاگرد را وظیفه بدهد تا مثال 4 را روی تخته حل کند.
2. از یک شاگرد بخواهد تا قضیهٔ کوساین را بیان کند.

معلومات اضافی برای معلم

ثبوت دو رابطهٔ دیگر مربوط فعالیت صفحهٔ 58 کتاب درسی.



در مثلث قایم‌الزاویه AHC داریم: $\overline{AH}^2 = h^2 = \overline{AC}^2 - \overline{HC}^2 = b^2 - x^2$

همچنین در مثلث مذکور:

$$c^2 = \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2$$
$$\overline{BH}^2 = a - x$$

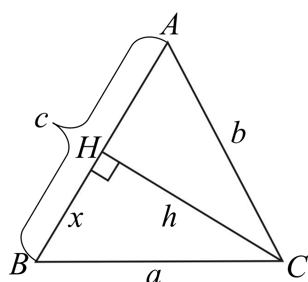
بنا بر آن:

$$c^2 = (a-x)^2 + h^2$$
$$c^2 = (a-x)^2 + b^2 - x^2$$
$$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$$

در مثلث AHC:

$$\cos C = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b\cos C$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b\cos C$$
$$2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$$
$$\boxed{\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$$

حال می‌خواهیم رابطهٔ $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ را به دست آریم:



در مثلث BHC داریم که: $h^2 = a^2 - x^2$

از طرف دیگر در مثلث AHC داریم:

$$b^2 = h^2 + (c-x)^2$$
$$b^2 = h^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

در رابطهٔ بالا قیمت h را به جایش قرار می‌دهیم:

$$b^2 = a^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2cx$$

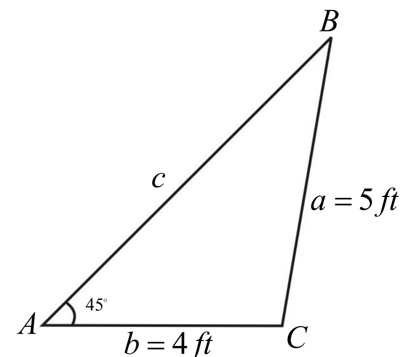
در مثلث BHC داریم:

$$\cos B = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a\cos B$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$-2ac\cos B = b^2 - a^2 - c^2$$
$$2ac\cos B = a^2 + c^2 - b^2$$
$$\boxed{\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 60

1- در یک مثلث ABC هرگاه $a = 5ft$, $b = 4ft$ و $\hat{A} = 45^\circ$ داده شده باشند. اندازهٔ ضلع c و زوایای نامعلوم مثلث را دریافت کنید.

حل:



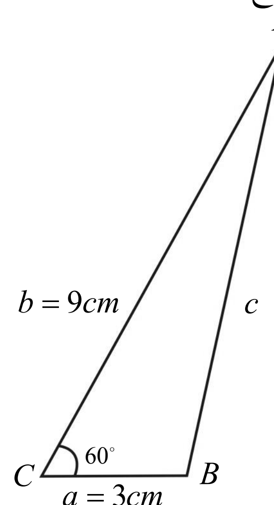
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow \sin B = \frac{b\sin B}{a} = \frac{4\cdot\sin 45^\circ}{5}$$
$$\sin B = \frac{4\cdot 0.707}{5} = \frac{2.828}{5} = 0.565$$
$$\hat{B} = \sin^{-1} 0.565 \Rightarrow \hat{B} = 34.4^\circ$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (45^\circ + 34.4^\circ) = 180^\circ - 79.4^\circ$$
$$\hat{C} = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \;,\quad 25 + 16 - 2\cdot 5\cdot 4\cos 100.6^\circ$$
$$c^2 = 41 - 40(-0.1839) = 41 + 7.356 = 48.356$$
$$c = 6.953ft$$

2- اگر در یک مثلث ضلع $a = 3cm$, $b = 9cm$ و زاویه بین شان 60° باشد. اندازهٔ ضلع c چند است؟

حل:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$c^2 = 9 + 81 - 2\cdot 3\cdot 9\cos 60^\circ$$
$$c^2 = 90 - 54\cdot\frac{1}{2} = 90 - 27 = 63 \Rightarrow c^2 = 63$$
$$c = 7.93cm$$



$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

فصل دوم مثلثات

عنوان درس: قانون تانجنت

صفحهٔ کتاب (57)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • قانون تانجنت را بدانند. • بااستفاده از قانون مذکور اضلاع و زوایای نامعلوم را دریافت کنند. • از اندوخته‌های فوق حظ ببرند و علاقه‌مند به آموزش علم ریاضی شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	چارت فرمول تانجنت مربوط سؤال ورودی.
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس چارتی که در آن فرمول $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$ به خط درشت نوشته شده باشد پیشروی صنف بیاویزد و سؤال ورودی را با شاگردان مطرح کند تا آنها در مورد، نظر خود را ارائه کنند، در صورتی که موفق به پاسخ دادن نشوند، معلم به تدریس طور زیر بپردازد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 61 کتاب درسی را در مشورت باهم انجام دهند.

- معلم از جریان فعالیت گروه‌ها نظارت کند، گروه‌های فعال را تشویق و ضعیفان را رهنمایی کند.

- معلم باید ثبوت قانون تانجنت را از قبل مطالعه نموده باشد تا بتواند شاگردان را در گروه‌های شان کمک نماید، البته شاگردان بعد از جرای فعالیت، خود به اثبات قانون تانجنت نایل می‌شوند که بااستفاده از آن قانون، می‌توان به دریافت اضلاع و یا زوایای نامعلوم توفیق حاصل کرد.

باید در نظر داشت که مراحل اجرای فعالیت فوق توسط نمایندهٔ یکی از گروه‌ها روی تخته توضیح گردد و معلم نماینده را کمک کند.

- معلم مثال 1 صفحهٔ 62 کتاب درسی را به شیوهٔ سؤال و جواب توسط یک شاگرد به روی تخته حل کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم غرض تحکیم بخشیدن درس رابطه‌های ضرب و تحویل؛ یعنی $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$ و $\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$ را توسط شاگردان روی تختهٔ صنف مشق کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم غرض ارزیابی دانش و مهارت شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. کی قانون تانجنت را بیان می‌کند؟
2. درصورتی که $\hat{A}=60^\circ, \hat{B}=30^\circ$ و یک ضلع مثلث $b=5cm$ باشد از قانون تانجنت ضلع a آن را دریابید.

معلومات اضافی برای معلم

ثبوت دو رابطه مربوط فعالیت صفحهٔ 62 رابطهٔ قانون ساین

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin A}=D \;\Rightarrow\; a=D\sin A \;\dots\; (1)$$

$$\frac{c}{\sin C}=D \;\Rightarrow\; c=D\sin C \;\dots\; (2)$$

$$c+a=D\sin A-D\sin C=D(\sin A+\sin C) \;\dots\; (3)$$

$$c-a=D\sin C-D\sin A=D(\sin C-\sin A) \;\dots\; (4)$$

رابطهٔ 3 را تقسیم رابطهٔ 4 می‌کنیم:

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{D(\sin C+\sin A)}{D(\sin C-\sin A)}=\frac{\sin C+\sin A}{\sin C-\sin A} \;\dots\; (5)$$

قیمت‌های $\sin C-\sin A, \sin C+\sin A$ را از فرمول‌های ضرب و تحویل در رابطهٔ (5) وضع می‌کنیم:

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{2\sin\frac{C+A}{2}\cdot\cos\frac{C-A}{2}}{2\cos\frac{C+A}{2}\cdot\sin\frac{C-A}{2}}$$

$$\frac{c+a}{c-a}=\tan\frac{C+A}{2}\cdot\cot\frac{C-A}{2}$$

چون $\cot\frac{C-A}{2}=\frac{1}{\tan\frac{C-A}{2}}$ است؛ پس:

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}$$

حال $D=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$ را وضع می‌کنیم و داریم که:

$$b=D\sin B \ \ldots\ (1)$$

$$c=D\sin C \ \ldots\ (2)$$

$$b+c=D\sin B+D\sin C=D(\sin B+\sin C) \ \ldots\ (3)$$

$$b-c=D\sin B-D\sin C=D(\sin B-\sin C) \ \ldots\ (4)$$

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{D(\sin B+\sin C)}{D(\sin B-\sin C)}=\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{B-C}{2}}$$

$$\frac{b+c}{b-c}=\tan\frac{B+C}{2}\cdot\cot\frac{B-C}{2}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

فصل دوم مثلثات

عنوان درس: قانون تانجنت(مثال دوم)

صفحهٔ کتاب (63)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • اضلاع و زوایای مثلث را با به کار بردن قانون تانجنت دریافت نمایند. • با تطبیق موفقانهٔ مثال فوق مبنی بر قانون تانجنت، ریاضی به شاگردان دلچسپ می‌شود.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی و گروهی
مواد ممد درسی	
توضیح ورودی (5) دقیقه	

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم با استفاده از شیوهٔ سؤال و جواب مثال 2 صفحهٔ 63 کتاب درسی را در صنف کار کند، در صورت مساعدت وقت جزء a تمرین صفحهٔ 64 کتاب درسی را به یک شاگرد بدهد تا روی تخته حل کند، همزمان عین سؤال را به دیگر شاگردان صنف بدهد تا در کتابچه‌های خویش حل کنند. در اخیر شاگرد روی تخته حل خویش را به دیگران توضیح دهد در صورت اشتباه، معلم وی را کمک و یاری رساند، شاگردانی که فعالیت را در کتابچه‌های خویش انجام داده اند، فعالیت خویش را مقایسه نموده و اصلاحات لازمه را در فعالیت خویش بیاورند.

تحکیم درس(7) دقیقه

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم غرض مطمئن شدن خویش از آموخته‌های شاگردان توسط سؤال زیر ایشان را ارزیابی کند:

1. هرگاه $\hat{A}=90^\circ$, $\hat{B}=60^\circ$ باشند، در آنصورت $\frac{a+b}{a-b}=?$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 64

اجزای نا معلوم مثلث را با استفاده ازقانون تانجنت به دست آورید:

a - هرگاه $a=35ft$, $\hat{B}=60^\circ$, $\hat{C}=75^\circ$ باشد.

b - هرگاه $A=45^\circ$, $b=37cm$, $B=75^\circ$ باشد.

حلa)

$$\hat{A}=180^\circ-(\hat{B}+\hat{C})=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)$$

$$\hat{A}=180^\circ-135^\circ=45^\circ$$

به اساس قانون تانجنت داریم:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}}{\tan\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}=\frac{35+b}{35-b}=\frac{\tan\frac{45^\circ+60^\circ}{2}}{\tan\frac{45^\circ-60^\circ}{2}}=\frac{\tan 52.5}{\tan(-7.5)}=\frac{1.303}{-0.131}=-9.946$$

$$\frac{35+b}{35-b}=-9.946 \Rightarrow 35+b=-9.946(35-b)$$

$$35+b=-348.129+9.96b$$

$$b-9.946=-348.129-35$$

$$-8.946b=-383.129$$

$$b=\frac{-383.129}{-8.946}=42.82$$

$$\boxed{b=42.82ft}$$

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}$$

$$\frac{c+35}{c-35}=\frac{\tan\frac{75^\circ+45^\circ}{2}}{\tan\frac{75^\circ-45^\circ}{2}}=\frac{\tan 60^\circ}{\tan 15^\circ}=\frac{1.732}{0.267}=6.486$$

$$c+35=6.486(c-35)=6.486c-227.041$$

$$c-6.486c=-227,041-35=-262.041=-5.486c=-262.041 \Rightarrow \boxed{c=47.76ft}$$

حلb)

$A = 45^\circ \quad , \quad a = ?$

$B = 75^\circ \quad , \quad c = ?$

$C = ?$

$b = 37cm$

$C = 180^\circ - (A + B)$

$B = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$\boxed{B = 60^\circ}$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{45^\circ + 60^\circ}{2}}{\frac{45^\circ - 60^\circ}{2}} = \frac{\tan 52.5}{\tan(-7.5)}$$

$$\frac{a+37}{a-37} = \frac{1.303}{-0.131} = -9.946$$

$a + 37 = -9.946(a - 37)$

$a + 37 = -9.946a + 368.002$

$a + 9.946a = 368.002 - 37 = 331.002$

$10.946a = 331.002$

$$a = \frac{331.002}{10.946} = 30.24$$

$\boxed{a = 30.24cm}$

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan\frac{B+A}{2}}{\tan\frac{B-A}{2}}$$

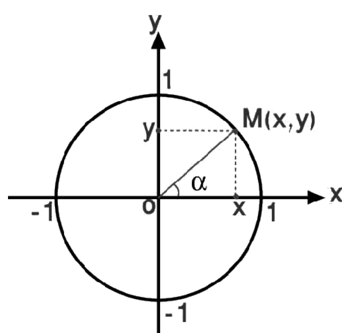
$$\frac{c+30.24}{c-30.24} = \frac{\tan\frac{75+45}{2}}{\frac{75-45}{2}} = \frac{\tan 60^\circ}{\tan 15^\circ} = \frac{1.739}{0.267} = 6.486$$

$c + 30.24 = 6.486(c - 30.24) = 6.486c - 196.136$

$c - 6.486c = -196.136 - 30.24 = -5.486c = -226.376$

$$c = \frac{-226.376}{-5.486} = 41.26$$

$\boxed{c = 41.26cm}$



فصل دوم مثلثات

عنوان درس: مطابقت‌های مثلثاتی

صفحهٔ کتاب (65)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • به مفهوم مطابقت پی برند. • مطابقت‌های مثلثاتی را از معادله‌های مثلثاتی تفکیک نمایند. • با کسب اندوخته‌های فوق احساس مسرت نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل سؤال ورودی و چارت صفحهٔ 66 کتاب
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، سؤال ورودی را که آیا $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ یک مطابقت مثلثاتی است یا نه؟ از شاگردان بپرسد تا شاگردان در مورد آن تفکر نمایند؛ البته سؤال مذکور بعد از اجرای یک سلسله فعالیت‌ها در صفحهٔ 66 کتاب حل خواهد شد، طوری که فعالیت‌ها به اثبات می‌رساند که $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ یک مطابقت می‌باشد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 65 را در گروه‌های خویش انجام دهند که با انجام فعالیت مذکور به مفهوم مطابقت پی خواهند برد. فعالیت طوری اجرا می‌شود که در افاده‌های A و B قیمت α به جاهای شان گذاشته می‌شود در نتیجه معلوم می‌شود که $A=B$ و یا $\frac{\csc\alpha+1}{\cot\alpha}=\frac{\cot\alpha}{\csc\alpha-1}$ می‌باشند که خود از یک مطابقت مثلثاتی نماینده‌گی می‌نماید.

- معلم بعد از اجرای کار گروهی نمایندهٔ یک گروه را بخواهد تا فعالیت خویش را به دیگران توضیح نماید، معلم با وی همکاری نماید.

- معلم هر دو چارت را پیشروی صنف بیاویزد و در چارت صفحهٔ 65 نشان دهد که شعاع دایرهٔ مثلثاتی یک واحد است.

- معلم با استفاده از چارت صفحهٔ 66 در حالی که به شاگردان سهم فعال میدهد(به شیوهٔ سؤال و جواب) به ثبوت مطابقت $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ بپردازد.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس، فعالیت صفحهٔ 67 کتاب $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$ و $\cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}$ را به یک شاگرد بدهد تا روی تخته ثبوت کند، همزمان عین مطابقت را به دیگر شاگردان نیز بدهد تا با استفاده از $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}, \csc\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$ که مطابقت‌های اساسی اند در کتابچه‌های خویش حل کنند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای اطمینان خویش، از شاگردان سؤال‌های زیر را بپرسد:

1. مطابقت چی نوع یک افادهٔ مثلثاتی است؟
2. کی میتواند به قیمت $\hat{\beta}=90^\circ$ افادهٔ $\dfrac{\cot\beta}{\csc\beta-1}$ را ساده بسازد؟

معلومات اضافی برای معلم

$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

قیمت $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ وضع می‌کنیم:

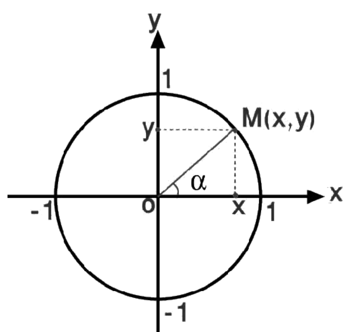
$$\frac{1}{1}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\csc^2\alpha \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\csc^2\alpha$$

چون $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ است؛ پس $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=\csc^2\alpha$

زیرا از مطابقت‌های اساسی می‌دانیم که کوسیکنت یک زاویه مساوی به معکوس ساین همان زاویه است؛ پس:

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha} \quad\Rightarrow\quad \cot\alpha=\frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

از مطابقت‌های اساسی می‌دانیم که: $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$، پس $\cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}$



فصل دوم مثلثات

عنوان درس: مطابقت‌های مثلثاتی

صفحهٔ کتاب (67)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • بااستفاده از حل مثالها، سؤالهای مشابه را حل کنند. • با جابه جایی و تعویض مطابقت‌های اساسی مثلثات، مطابقت‌ها را ثبوت و افاده‌های داده شده را ساده بسازند. • با فراگیری موضوع نامبرده علاقه مند کسب بیشتر علم ریاضی شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس ، به تدریس طوری بپردازد که در تحت عنوان فعالیت جریان درس قرار زیر رهنمایی صورت گرفته است:

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم مثال 1 صفحهٔ 67 را با شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند.
- معلم مثال 2 صفحهٔ 67 را به یک شاگرد بدهد تا روی تختهٔ صنف حل کند، همزمان عین مثال را در حالیکه کتابها بسته اند دیگر شاگردان در کتابچه‌های خود حل کنند. در ختم درس شاگرد روی تخته فعالیت خویش را به دیگران توضیح دهد، هرگاه به مشکلی مواجه شود، شاگرد دیگری به روی تختهٔ صنف رفع مشکل نماید.
- معلم مثال 3 و 4 صفحهٔ 68 کتاب را به همین شیوهٔ سؤال و جواب روی تخته حل کند.
- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نماید تا مثال 5 صفحهٔ 68 را در گروه‌های خویش با مشورت همدیگر حل کنند. در اخیر یک شاگرد به نماینده‌گی گروه خویش، کار گروهی خود را به دیگران توضیح دهد.
- معلم برای ایجاد رقابت مثبت بین شاگردان، هدایت دهد تا مثال 6 و 7 را شاگردان آماده‌گی گرفته طور داوطلبانه در صنف حل کنند.

فصل دوم مثلثات

عنوان درس: **حل مثال‌های 8 ، 9 و 10**

صفحهٔ کتاب (69-70) **وقت تدریس(1 ساعت درسی)**

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • با تعویض و جابه جایی مطابقت‌های اساسی مثلثاتی، مثالها و سؤالها را حل کنند.
روش های تدریس	**سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی**
مواد ممد درسی	مواد مورد ضروت
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس به حل مثال‌ها طور زیر بپردازد:

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا مطابقت مربوط مثال 8 صفحهٔ 69 کتاب را در مشورت باهم حل کنند.(در جریان فعالیت کتابها بسته شوند.)

- معلم در جریان فعالیت از کار گروهی شاگردان نظارت کند گروه‌های فعال را تشویق و گروه‌های ضعیف را کمک کند. در ختم کار گروهی، نمایندهٔ یک گروه را بخواهد تا فعالیت خویش را به دیگران توضیح دهد.

- معلم مثال 9 صفحهٔ 69 کتاب را به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم غرض تحکیم بخشیدن درس، مثال 10 صفحهٔ 70 کتاب درسی را نیز به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای متیقن شدن خود از آموزش شاگردان، سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. کدام معادله را مطابقت مثلثاتی میتوان گفت؟
2. کی مطابقت‌های اساسی مثلثاتی را روی تخته می‌نویسد؟

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 70

1- با درنظر داشت روابط اساسی مثلثات رابطهٔ معادل هر سؤال زیر را دریافت کنید:

$a)\ \frac{\sin 250^\circ}{\cos 250^\circ}$ $\qquad b)\ \sqrt{\sec^2\beta - 1}$ $\qquad c)\ \frac{1}{\cos 80^\circ}$

حل:

$$a)\ \frac{\sin 250^\circ}{\cos 250^\circ} = \tan 250^\circ$$

$$b)\ \sqrt{\sec^2\beta - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\beta} - \frac{1}{1}} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\beta}{\cos^2\beta}} = \sqrt{\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}}$$

$$c)\ \frac{1}{\cos 80^\circ} = \sec 80^\circ$$

2- افادهٔ های زیر را توسط $\sin\beta$ ارائه کنید:

$$a)\ \cot\beta\cos\beta \qquad , \qquad b)\ \cot^2\beta$$

حل:

$$a)\ \cot\beta\cos\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\cdot\cos\beta = \frac{\cos^2\beta}{\sin\beta} = \frac{1-\sin^2\beta}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\beta} - \frac{\sin^2\beta}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\beta} - \sin\beta$$

$$b)\ \cot^2\beta = \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{1-\sin^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\beta} - \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\beta} - 1$$

3- مطابقت های مثلثاتی زیر را ثبوت کنید:

$$a)\ \frac{\cos ec\alpha}{\cot\alpha + \tan\alpha} = \cos\alpha \qquad b)\ \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = 1 - 2\cos^2 x$$

$$c)\ \frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha} = \tan\alpha \qquad d)\ \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \cos 2x$$

حل:

$$a)\ \frac{\cos ec\alpha}{\cot\alpha + \tan\alpha} = \cos\alpha = \frac{\frac{1}{\sin\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}} = \frac{\frac{1}{\sin\alpha}}{\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}} = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1} = \cos\alpha$$

$$b)\ \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x\cdot\sin x}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x\sin x}} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{1}$$

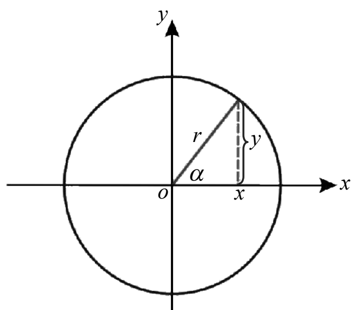
$$\Rightarrow 1 - \cos^2 x - \cos^2 x = 1 - 2\cos^2 x$$

$$c)\ \frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha(1 + 2\cos\alpha)}{1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - 1}$$

$$= \frac{\sin\alpha(1+2\cos\alpha)}{\cos\alpha + 2\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha(1+2\cos\alpha)}{\cos\alpha(1+2\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

$$d)\ \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1}$$

$$\cos^2 x - \sin x = \cos 2x$$



فصل دوم مثلثات

عنوان درس: معادلات مثلثاتی $a\sin x + b = 0$

صفحهٔ کتاب (71)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم معادلات مثلثاتی را بدانند. • فرق معادلات مثلثاتی را با مطابقت بفهمند. • معادلات مثلثاتی را بتوانندحل کنند. • از آموزش مفاهیم و مهارت‌ها به خود ببالند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، سؤال ورودی را از شاگردان بپرسد تا در مورد حل آن تفکر نمایند، در صورتی‌که به ارائهٔ جواب موفق نشدند، برایشان گفته شود: هرگاه به α قیمت‌های مختلف بدهیم، طوری‌که به تمام قیمت‌ها طرف چپ مساوی به طرف راست معادله گردد معادله آن یک مطابقت؛ ولی اگر به بعضی قیمت‌های α طرف راست معادله مساوی به طرف چپ معادله نشود مطابقت نه، بلکه معادله است.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 71 را به مشورت همدیگر حل کنند. معلم از کار گروهی شاگردان نظارت نماید، گروه‌های فعال را تشویق کند و به گروه‌های ضعیف رهنمایی کند.

در ختم فعالیت نمایندهٔ یک گروه را بخواهد تا فعالیت گروهی خود را به دیگران توضیح دهد، در صورتی‌که اشتباهی را مرتکب شود معلم کمک نماید.

- معلم مثال 1 صفحهٔ 72 را که در مطابقت به حالت اول($a\sin x + b = 0$) است به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند.

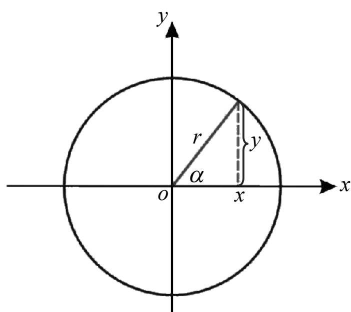
تحکیم درس(7) دقیقه

معلم برای تحکیم بخشیدن درس مثال 2 صفحهٔ 73 را نیز به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

معلم برای اطمینان خویش از فراگیری شاگردان سؤال‌های زیر را از ایشان بپرسد:

1. کی میتواند شکل عمومی یک معادلهٔ مثلثاتی را از جنس ساین بنویسد؟
2. کی در مورد حل معادلهٔ $5\sin x - 2 = 0$ و $2\sin x - 5 = 0$ مناقشه می‌کند؟
3. کی ساحهٔ تحول ساین یک زاویه را می‌نویسد؟



فصل دوم مثلثات

عنوان درس: حالت دوم معادلهٔ مثلثاتی $a\cos x + b = 0$

صفحهٔ کتاب (73)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • اشکال مختلف معادلات مثلثاتی را بدانند. • بتوانند معادلات مثلثاتی را حل کنند. • از حل معادلات مثلثاتی احساس خوشحالی کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل صفحهٔ 73
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی به تدریس موضوع طور زیر بپردازد:

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

- معلم چارت صفحهٔ 73 را پیشروی صنف بیاویزد و مثال 1 را به شیوهٔ سؤال و جواب درصنف حل کند.

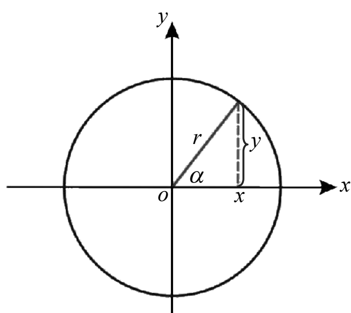
تحکیم درس(7) دقیقه

معلم غرض تحکیم بخشیدن درس مثال 2 صفحهٔ 74 کتاب درسی را به یک شاگرد بدهد تا روی تخته حل کند، همزمان عین مثال را به بقیه شاگردان بدهد تا بدون استفاده از کتاب، در کتابچه‌های خویش حل کنند. در اخیر شاگرد روی تخته فعالیت خویش را توضیح دهد، در صورتی‌که حل آن درست باشد شاگردانی‌که مرتکب اشتباه شده اند، اشتباه خویش را اصلاح نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم غرض اطمینان خویش از آموزش شاگردان سؤال‌های زیر را از ایشان بپرسد:

1. $\alpha = \frac{\pi}{6} rad$ به کدام درجه مطابقت دارد؟
2. کی ست جذرهای معادلهٔ $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ را می‌نویسد؟



فصل دوم مثلثات

عنوان درس: حالت سوم معادلهٔ مثلثاتی $a\tan x + b = 0$

صفحهٔ کتاب (74)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • معادلات مثلثاتی را حل نمایند. • ست جذرهای معادلهٔ فوق را تعیین نمایند. • از حل معادلات مثلثاتی به کسب دانش ریاضی میل و رغبت پیدا کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل صفحهٔ 74 مربوط مثال سوم
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم فعالیت‌های مقدماتی تدریس را انجام دهد؛ سپس جریان درس را پیش ببرد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم مثال 1 را که در آن $a = 1$ و $b = -\sqrt{3}$ است به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند و ست جذرهای معادله را که زوایای کوترمینل اند نیز بنویسد.
- معلم هدایت دهد تا شاگردان کتابهای خویش را بسته کنند.
- معلم یک شاگرد را وظیفه دهد تا مثال 2 صفحهٔ 75 کتاب را روی تخته حل کند، همزمان عین مثال را شاگردان دیگر در کتابچه‌های خویش حل کنند. در اخیر شاگرد روی تخته حل خویش را به دیگران توضیح دهد و شکل عمومی ست جذرهای معادله را نیز روی تخته بنویسد، هرگاه مشکلی داشت معلم شاگرد داوطلب دیگر را وظیفه دهد تا به حل مثال بپردازد، معلم همکاری نماید.

تحکیم درس(7) دقیقه

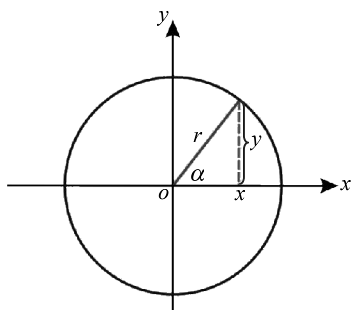
- معلم جهت تحکیم بخشیدن درس شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا در مشورت همدیگر مثال 3 صفحهٔ 75 را حل کنند.
- معلم در جریان فعالیت از کار گروهی شاگردان نظارت کند، گروه‌های فعال را تشویق و ضعیفان را کمک نماید. در ختم فعالیت نمایندهٔ یک گروه را وظیفه دهد تا کار گروهی را به دیگران توضیح دهد، در صورتی‌که که اشتباهی در فعالیت وی موجود باشد معلم خود رهنمایی کند ویا شاگردی را از دیگر گروه وظیفه دهد تا به حل سؤال بپردازد.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم غرض اطمینان از کسب دانش و مهارت شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. حل عمومی معادلهٔ $\tan(x + \frac{\pi}{3}) = \tan(2x - \frac{\pi}{4})$ عبارت از $x = K\pi + \frac{7\pi}{12}$ است کی میتواند برای $K = 3$ حل معادله را دریافت کند؟

فصل دوم مثلثات



عنوان درس: حالت چهارم معادلهٔ مثلثاتی $a\cot x + b = 0$

صفحهٔ کتاب (76)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • معادلات مثلثاتی که شکل $a\cot x + b = 0$ را داشته باشند حل کنند. • ست جذرهای معادلات مشابه معادلهٔ فوق را بدانند و از حل معادلات فوق احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل صفحهٔ 76
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس مثال 1 را که در مطابقت به معادلهٔ $a\cot x + b = 0$ است و در آن $a = 1$ و $b = -1$ می‌باشد طور زیر حل کند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم چارت شکل صفحهٔ 76 راپیشروی صنف بیاویزد و مثال 1 را به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند.(شاگردان را در حل مثال سهیم بسازد.)

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس، مثال 2 را توسط یک شاگرد داوطلب در صنف حل کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای اطمینان خویش از فراگیری شاگردان جزء a تمرین صفحهٔ 76 را به شکل گروهی توسط شاگردان حل کند. در اخیر نمایندهٔ یک گروه را بخواهد تا از کار گروهی خویش دفاع کند.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 76

ست حل‌عمومی هر یک از معادلات زیر را دریافت نمایید:

$a)\ 3\cos x + 5 = 0 \qquad b)\ \tan x = \sqrt{3}$

حل a):

$$3\cos x = -5$$

$$\cos x = \frac{-5}{3} = -1.6$$

طوری که میدانید ساحهٔ تحول cos در انتروال $[-1,1]$ است؛ یعنی: $-1 \le \cos x \le 1$

بنابر آن زاویه‌یی که cos آن خارج از این انتروال باشد وجود ندارد؛ پس گفته می‌شود که معادلهٔ فوق حل ندارد.

حل b):

$$\tan x = \sqrt{3} \quad , \quad x = \tan^{-1}\sqrt{3} \;\Rightarrow\; x = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

زاویهٔ کوچک مثبتی که تانجانت آن $\sqrt{3}$ است عبارت از $\frac{\pi}{3}$ می‌باشد؛ پس حل عمومی آن $x = n\pi + \frac{\pi}{3}$ است.

فصل دوم مثلثات

$a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$

عنوان درس: معادله‌های درجه دوم مثلثاتی

صفحهٔ کتاب (77)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم معادلهٔ درجه دوم را بدانند. • معادلهٔ درجه دوم را حل کنند. • با کسب دانش و مهارت فوق علاقه‌مند علم ریاضی شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	
توضیح ورودی (5) دقیقه	معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، به تدریس موضوع بپردازد؛ زیرا طرح و یا سؤالی به حیث موضوع ورودی ندارد که در مورد آن توضیحاتی داده شود.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم مثال 1 صفحهٔ 77 کتاب درسی را به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند.

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا مثال 2 صفحهٔ 78 را در گروه‌های خویش به شکل مشورتی حل کنند. معلم توجه کند تا شاگردان از کتاب استفاده نکنند. در اخیر معلم نمایندهٔ یک گروه را بخواهد تا فعالیت گروهی خود را به دیگران توضیح دهد اگر در زمینه کاستی موجود می‌باشد معلم کمک نماید.

تحکیم درس(7) دقیقه

معلم هدایت دهد تا شاگردان کتابهای درسی خویش را بسته کنند.

معلم محترم غرض تحکیم درس مثال 3 صفحهٔ 79 را به یک شاگرد بدهد تا روی تخته حل کند. همزمان عین مثال را شاگردان دیگر نیز در کتابچه‌های خود حل کنند. در ختم فعالیت(فعالیت انفرادی است و همهٔ شاگردان فعال نگهداشته شده اند). شاگرد روی تخته فعالیت خویش را به دیگران توضیح دهد، اگر اشتباهی در کار وی موجود باشد شاگردی توظیف شود تا اشتباه را مرفوع سازد.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم جهت مطمئن شدن خویش از آموزش شاگردان سؤالهای زیر را مطرح نماید:

1. کی شکل عمومی معادلهٔ درجه دوم مثلثاتی را می‌گوید؟
2. کی فرق بین معادلهٔ درجه اول و درجه دوم مثلثاتی را روی تخته می‌نویسد؟
3. کی میتواند ثوابت را در معادلهٔ درجه دوم مثلثاتی نشان دهد؟

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 80

ست جذرهای معادلات مثلثاتی زیر را در یافت کنید.

1 - $\cos 2x+1=2\sin^2\frac{x}{2}$

2 - $3\cos^2 x+2\cos x-5=0$

3 - $\sin^2 x-(1-\sqrt{3})\sin x\cdot\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x=0$

حل سؤال 1:

$$\cos 2x+1=2\sin^2\frac{x}{2} \Rightarrow \cos 2x=2\sin^2\frac{x}{2}-1 /\cdot(-1)$$

$$-\cos 2x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$$

میدانیم که $1-2\sin^2\frac{x}{2}=\cos x$، است؛ بنابرآن به جایش وضع می‌کنیم:

$$-\cos 2x=\cos x \Rightarrow -\cos 2x-\cos x=0$$

$$\cos 2x+\cos x=0 \Rightarrow 2\cos^2 x-1+\cos x=0$$

$$2\cos^2 x+\cos x-1=0$$

در این مرحله $\cos x=y$ وضع می‌کنیم و داریم که:

$$2y^2+y-1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)=1+8=9$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=\pm 3$$

$$y_1=\frac{-1+3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \quad , \quad y_2=\frac{-1-3}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$\cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\cos^{-1}\frac{1}{2} \quad , \quad x=60^\circ=\frac{\pi}{3}$$

$$A_1=\left\{\frac{\pi}{3},2\pi+\frac{\pi}{3},4\pi+\frac{\pi}{3},\ \ldots\ ,2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\pi\right\}$$

$$\cos x=-1 \Rightarrow x=\cos^{-1}(-1) \quad , \quad x=\pi$$

$$A_2=\{2k\pi+\pi\}\ , \quad A=A_1\cup A_2=\left\{\frac{\pi}{3},2\pi+\frac{\pi}{3},4\pi+\frac{\pi}{3},\ \ldots\ ,2k\pi+\frac{\pi}{3},2k\pi+\pi,k=0,1,2\ldots k\in\pi\right\}$$

حل سؤال 2:

$$3\cos^2 x+2\cos x-5=0$$

برای حل سؤال فوق $\cos x=y$ وضع می‌کنیم؛ پس:

$$3y^2+2y-5=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4\cdot 3\cdot(-5)=4+60=64$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{64}=\pm 8$$

از قیمت Δ معلوم می‌شود که معادله دارای حل است:

$$y_1 = \frac{-2+8}{6} = \frac{6}{6} = 1 \quad , \quad y_2 = \frac{-2-8}{6} = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3}$$

$$\cos x = 1 \;\; , \quad x = \cos^{-1}(1) \;\Rightarrow\; x = 0^\circ$$

آن زاویهٔ کوچک که کوساین آن 1 باشد صفر درجه می‌باشد.

$$A = \{2k\pi + 0^\circ \, , \; k \in ZI\}$$

$$\cos x = \frac{-5}{3}$$

از اینکه کوساین یک زاویه بین $1+$ و $1-$ تحول می کند؛ بنابرآن زاویه‌یی دریافت نمیشود که کوساین آن بزرگتر از $1+$ و یا کوچکتر از $(1-)$ باشد؛ پس در این صورت ست حل همان ست A است.

حل سؤال3:

$$\sin^2 x - (1-\sqrt{3})\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0 / \div \cos^2 x$$

$$\tan^2 x - (1-\sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$$

$$\tan^2 x + 0.73\tan x - 1.73 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 0.53 - 4(1)(-1.73) = 0.53 + 6.92 = 7.45$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{7.45} = \pm 2.73$$

$$\tan x = \frac{-0.73 + 2.73}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x = \tan^{-1}(1) \quad , \qquad x = 45^\circ \;\; \text{یا} \;\; x = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \left\{2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in ZI\right\}$$

$$\tan x = \frac{-0.73 - 2.73}{2} = \frac{-3.46}{2} = -1.73$$

$$x = arc\tan(-1.73) = \tan^{-1}(-1.73) \;\; , \quad x = -60^\circ = -\frac{\pi}{3}$$

$$x = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

$$x = \left\{(2k-1)\pi + \frac{2\pi}{3} \, , \quad k \in ZI\right\}$$

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

فصل دوم مثلثات

عنوان درس: سیستم معادلات دومجهولۀ مثلثاتی(نوع اول و دوم)

صفحۀ کتاب (81-83)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • سیستم معادلات دو مجهولۀ مثلثاتی را با انواع آن بشناسند. • بدانند که $\begin{cases}\sin x+\sin y=a\\ x+y=\alpha\end{cases}$ و $\begin{cases}\sin x-\sin y=a\\ x-y=\alpha\end{cases}$ هرکدام یک سیستم اند. • سیستم معادلات دو مجهوله را حل و از حل آن احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت سیستم‌های معادلات مربوط سؤال ورودی باخط روشن و قابل دید.
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس، سؤال ورودی را از شاگردان بپرسد تا در مورد آن بیاندیشند. در ضمن معلم بپرسد معادلات نوشته شدۀ روی چارت متشکل از چند سیستم اند؟ جواب سؤال ورودی اینست، بلی می‌توانیم سیستم معادلات مثلثاتی را حل کنیم که با حل مثال‌های داده شده جواب بلی به حقیقت مبدل می‌شود، اما قسمت دوم سؤال در معلومات اضافی توضیح داده می‌شود.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم عنوان(نوع اول) را روی تخته بنویسد و با شیوۀ سؤال و جواب این درس را به اتمام برساند.

- معلم مثال 1 صفحۀ 82 را که $\begin{cases}\sin x+\sin y=1\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ است روی تخته بنویسد و از شاگردان بخواهد که با معادلات روی چارت مقایسه کنند و قیمت‌های a و α را بنویسند، هرگاه شاگرد موفق به نوشتن آنها نگردید معلم بگوید به اساس ملاحظۀ چارت و مثال داده شده $a=1$ و $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ می‌باشد. به همین قسم با سؤال و جواب(سهیم ساختن شاگردان) مثال را در صنف حل کند.

- معلم بعد از این که نوع دوم سیستم معادلات را معرفی می کند مثال دوم را برای تحکیم بخشیدن درس کار کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا در مشورت باهم مثال دوم را حل کنند.(در این موقع کتابهای شاگردان بسته باشند.)

- معلم در اخیر کار گروهی نمایندۀ یک گروه را بخواهد تا از اجرای فعالیت گروهی خویش توضیحات ارائه کند، در صورت ضرورت معلم همکاری نماید.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

معلم جهت اطمینان از فراگیری دانش و مهارت شاگردان سؤالهای زیر را از شاگردان بپرسد:

1. کی میتواند سیستم معادلات دو مجهولۀ مثلثاتی را بنویسد؟
2. کی میگوید نوع اول سیستم معادلات مثلثاتی متشکل از چند سیستم می‌باشد؟
3. کی سیستم‌های معادلات مثلثاتی مربوط نوع اول را می نویسد؟

معلومات اضافی برای معلم

هشت سیستم معادلات نوع اول که در متن از آن نام برده شده است قرار ذیل اند:

1) $\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ x + y = \alpha \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x - \sin y = a \\ x - y = \alpha \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ x - y = \alpha \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin x - \sin y = a \\ x + y = \alpha \end{cases}$

5) $\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ x + y = \alpha \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \cos x - \cos x = a \\ x - y = \alpha \end{cases}$

7) $\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ x - y = \alpha \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \cos x - \cos y = a \\ x + y = \alpha \end{cases}$

فصل دوم مثلثات

عنوان درس: سیستم معادلات دومجهولهٔ مثلثاتی(نوع سوم و چهارم)

صفحهٔ کتاب (84)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • سیستم‌های معادلات نوع سوم و چهارم را بشناسند. • سیستم معادلات فوق‌الذکر را حل کنند. • از شناخت و حل معادلات فوق اعتماد به نفس پیدا کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت نوع سوم و چهارم سیستم معادلات دو مجهوله قابل رؤیت
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس طور زیر تدریس کند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم عنوان(نوع سوم سیستم مهادلات دو مجهولهٔ مثلثاتی) را روی تخته بنویسد و چارت نوع مربوط را پیشروی صنف بیاویزد. بعد مثال 3 را روی تخته بنویسد، از یک شاگر بخواهد تا قیمت‌های a و α را در مثال داده شده نشان دهد؛ سپس به شیوهٔ سؤال و جواب مثال مذکو را در صنف حل کند.

- معلم عنوان نوع چهارم سیستم معادله را روی تخته بنویسد، در حالی‌که چارت سیستم معادلات مربوط نوع چهارم را پیشروی صنف می‌آویزد شرایط حل این سیستم را نیز روی تخته بنویسد و به شیوهٔ سؤال و جواب(شاگردان سهیم شوند) مثال 4 را در صنف حل کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس مثال 4 را توسط یک شاگرد داوطلب طور تکراری کار کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم جهت اطمینان از آموزش شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. کی نوع سوم سیستم معادلات را می‌نویسد؟(یک شاگرد روی تخته بنویسد.)
2. کی نوع چهارم سیستم معادلات را می‌نویسد؟(یک شاگرد روی تخته بنویسد.)

فصل دوم مثلثات

عنوان درس: سیستم معادلات دومجهولهٔ مثلثاتی(نوع پنجم و ششم)

صفحهٔ کتاب (84)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • سیستم‌های نوع پنجم و ششم را از نوع دیگر سیستم تشخیص دهند. • این نوع معادلات را حل کنند. • شرایط حل دو نوع معادلهٔ فوق را بدانند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارتی که در آن سیستم معادلات نوع پنچم و ششم به خط درشت نوشته شده باشد.
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس، چارت سیستم معادلات نوع پنجم را پیشروی صنف بیاویزد و از شاگران بپرسد که: کی میتواند دو سیستم را در نوع پنجم طور جداگانه بنویسد، هرگاه شاگردان نتوانستند در آن صورت $\begin{cases} x+y=\alpha \\ \tan x\cdot\tan y=a \end{cases}$ را به حیث یک سیستم و $\begin{cases} x-y=\alpha \\ \tan x\cdot\tan y=a \end{cases}$ را به حیث سیستم دیگری معرفی کند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

- معلم محترم مثال 5 صفحهٔ 87 کتاب را به شیوهٔ سؤال و جواب(به شاگردان سهم بیشتر داده شود) در صنف حل کند.

- معلم چارت سیستم معادلات نوع ششم را پیشروی صنف بیاویزد و مثال 6 صفحهٔ 89 که در تطابق با نوع ششم سیستم معادلات است نیز به شیوهٔ سؤال و جواب درصنف حل کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم غرض تحکیم بخشیدن درس مثال 6 را توسط یک شاگرد داوطلب(در حالی‌که کتابها بسته اند) در صنف کار کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم جهت مطمئن شدن از فراگیری شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. کی نوع پنجم سیستم معادلات را روی تخته می نویسد؟(یک شاگرد روی تخته بنویسد)
2. کی نوع ششم سیستم معادلات را روی تخته می‌نویسد؟(یک شاگرد روی تخته بنویسد)

معلومات اضافی برای معلم

توضیح مثال 6 صفحهٔ 89

$$\frac{\tan x-\tan y}{\tan x+\tan y}=2$$

قیمت‌های صورت و مخرج را به جای شان وضع می‌کنیم:

$$\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin y}{\cos y}}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}}=2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{\sin x\cos y-\cos x\sin y}{\cos x\cdot\cos y}}{\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cdot\cos y}}=2$$

می‌دانیم که $\sin x\cos y-\cos x\sin y=\sin(x-y)$ و $\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin(x+y)$ است؛ پس:

$$\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=2 \quad , \quad 2\sin(x+y)=\sin(x-y)$$

چون $x-y=\frac{\pi}{2}$ است؛ پس:

$$2\sin(x+y)=\sin\frac{\pi}{2}$$

$$2\sin(x+y)=1$$

$$\sin(x+y)=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x+y=\frac{\pi}{6} \quad , \quad x-y=\frac{\pi}{2}$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 90

سیستم های معادلات مثلثاتی زیر را حل نمایید:

$$a)\ \begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \tan x+\tan y=1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x}=2 \end{cases}$$

حل a):

$$\tan(x+y)=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\cdot\tan y}=1$$

$$\frac{1}{1-\tan x\cdot\tan y}=1 \quad , \quad 1-\tan x\cdot\tan y=1$$

$$-\tan x\cdot\tan y=1-1$$

$$\tan x\cdot\tan y=0 \quad \ldots\ I$$

$$\tan x+\tan y=1 \ \ldots\ II$$

از رابطهٔ II قیمت $\tan x$ را دریافت و رابطهٔ I به جایش وضع می‌کنیم.

$$\tan x = 1 - \tan y$$

$$(1-\tan y)\cdot \tan y = 0 \quad , \quad \tan y - \tan^2 y = 0 \;\Rightarrow\; \tan y(1-\tan y) = 0$$

$$\tan y(1-\tan y) = 0 \quad , \quad \tan y = 0 \quad , \quad y = \tan^{-1} 0 = 0^0 \quad , \quad 1-\tan y = 0 \quad , \quad \tan y = 1$$

$$y = \tan^{-1}(1) \;\Rightarrow\; y = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

حالا قیمت‌های y را در معادلهٔ I قرار می‌دهیم تا برای زاویهٔ xقیمت‌ها به دست آوریم:

$$\tan x \cdot \tan y = 0$$

$$y = 0^\circ \;\Rightarrow \tan x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0^\circ$$

$$y = \frac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; \tan x \cdot 1 = 0 \;\Rightarrow\; \tan x = 0 \quad , \quad x = 0^\circ$$

ناگفته نباید گذاشت که سیستم فوق به نوع چهارم مربوط می‌شود.

حل b)**:**

$$x - y = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 2$$

سیستم فوق به هیچ نوع از سیستم‌هایی که مطالعه شد تعلق ندارد.

میدانیم که $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ است؛ پس: $\tan x = 0$

زاویه‌یی که tan آن مساوی 2 باشد به رؤیت جدول به '30 °63 مطابقت دارد؛ پس: $x = 63^\circ\ 30'$

قیمت x را در رابطهٔ I به جایش وضع می‌کنیم، داریم:

$$x - y = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$63^\circ\ 30' - y = 60^\circ$$

$$-y = 60^\circ - 63^\circ\ 30'$$

$$-y = -3^\circ\ 30' \;\Rightarrow\; \boxed{y = 3^\circ\ 30'}$$

حل تمرینات عمومی فصل دوم(7 ساعت درسی)

سؤالهای زیر را به دقت خوانده برای هر سؤال چهار جواب داده شده است جواب درست را دریافت و دور آن حلقه بکشید.

1- $\hat{A}=20^\circ$ زاویه بین ضلع $b=10cm$ و $c=7cm$ می باشد. اندازۀ ضلع a عبارت است از :

$a)$ $16.4cm$ $b)$ $16cm$ $c)$ $15.9cm$ ⓓ $4.176cm$

2- اگر $a=8ft$, $b=5ft$ و $c=10ft$ باشند؛ اندازۀ زاویۀ B عبارت است از:

$a)$ 28.5° ⓑ 29.4° $c)$ 29° $d)$ 28°

3- اگر $\hat{A}=48^\circ$, $\hat{B}=22^\circ$ و $a=5ft$ باشد. اندازۀ ضلع b عبارت است از:

$a)$ $8ft$ ⓑ $2.52ft$ $c)$ $9ft$ $d)$ $-9.5ft$

4- ناحیۀ قیمت های تابع $x=arc\sec y$ عبارت است از:

$a)$ IR^- $b)$ IR $c)$ $IR-\{0\}$ $d)$ IR^+

5- مطابقت مثلثاتی $\sec x(\sec x-\cos x)$ مساوی است به:

$a)$ $\tan x$ $b)$ $\frac{1}{\tan x}$ $c)$ $\cot x$ ⓓ $\tan^2 x$

سؤالات زیر را حل نمایید:

1- هرگاه اندازۀ $\hat{A}=30^\circ$ بین ضلع $c=8ft$ و $b=5ft$باشند اندازۀ ضلع a و $\sin C$ را دریافت کنید.

حل:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$a^2=25+64-2\cdot5\cdot8\cos30^\circ$$

$$a^2=89-80\frac{\sqrt{3}}{2}=89-40\sqrt{3}=89-40\cdot1.73=89-69=20$$

$$\boxed{a=\sqrt{20}=4.47}$$

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c},\ \sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{8\cdot\sin30^\circ}{\sqrt{20}}$$

$$\sin C=\frac{8\cdot\frac{1}{2}}{2\cdot\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}=0.8944$$

$$\boxed{\sin C=0.8944}$$

2- اگر در یک مثلث اندازهٔ سه ضلع آن $b=5cm, a=8cm$ و $c=10cm$ داده شده باشد، اندازهٔ زاویهٔ A و اندازهٔ زاویهٔ B که مقابل ضلع b قرار دارد چند است ؟

حل: ا ز قانون کوساین استفاده می کنیم:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \quad , \quad \cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{64+100-25}{2\cdot 8\cdot 10} = \frac{164-25}{160} = \frac{139}{160} = 0.8687$$

$$\cos\hat{B} = 0.8687 \quad \Rightarrow \quad \hat{B} = \cos^{-1}(0.8687)$$

$$\boxed{\hat{B} = 29.7^\circ \approx 30^\circ}$$

$$\cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\hat{A} = \frac{25+100-64}{2\cdot 5\cdot 10} = \frac{125-64}{100} = \frac{61}{100} = 0.61$$

$$\boxed{\hat{A} = 37^\circ\ 40'}$$

3- در مثلث ABC اگر $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و اندازهٔ زاویه $\hat{A} = 30^\circ$ داده شده باشد، اندازهٔ زاویهٔ B و C را دریافت کنید.

حل:

$$\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} = c = \sqrt{3} \quad , \quad b = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

$$a^2 = 4 + 3 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cos 30^\circ$$

$$a^2 = 7 - 4\cdot\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 7 - 6 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 1}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \quad , \quad \cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

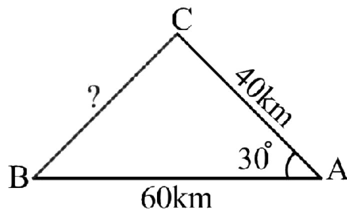
$$\cos\hat{B} = \frac{1+3-4}{2\cdot 1\cdot\sqrt{3}} = \frac{4-4}{2\sqrt{3}} = \frac{0}{2\sqrt{3}} = 0$$

$$\hat{B} = \cos^{-1}(0^\circ) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{B} = 90^\circ}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} \quad , \quad \cos\hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos\hat{C} = \frac{1+4-3}{2\cdot 1\cdot 2} = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos^{-1}(\frac{1}{2}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{C} = 60^\circ}$$



4- دو کشتی از یک نقطهٔ A به دو جهت مختلف طوری به حرکت افتاده اند که زاویه بین مسیر حرکت شان 30° است. اگر بعد از یک ساعت، کشتی اول $40km$ و کشتی دوم $60km$ مسافه را طی کرده باشد، فاصله بین دو کشتی چند است؟

حل: از قانون کوساین استفاده می‌کنیم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

$$a^2 = (40)^2 + (60)^2 - 2\cdot 40\cdot 60\cos 30^\circ \quad \Rightarrow \quad a^2 = 1600 + 3600 - 4800\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = 5200 - 2400\cdot 1.73 = 5200 - 4152 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 1048 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{1048} = 32.37km$$

$$\boxed{a = 32.37km}$$

5- $\cot^2\beta$ را از جنس $\sin\beta$ و $\cos\beta$ افاده کنید.

حل:

$$\cot^2\beta = \left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)^2 = \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{1-\sin^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\beta} - 1$$

$$\cot^2\beta = \left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)^2 = \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{\cos^2\beta}{1-\cos^2\beta}$$

6- مطابقت های مثلثاتی زیر را ثبوت کنید:

$a)\ \dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \tan A$ $\qquad b)\ \dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} = \tan^2 A$

$c)\ \tan A + \cot A = 2\csc 2A$ $\qquad d)\ \dfrac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)} = \tan\dfrac{A}{2}\cdot\cot\dfrac{B}{2}$

$e)\ \dfrac{\cos A}{1-\sin A} = \tan(45+\dfrac{A}{2})$ $\qquad f)\ \cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha) = \dfrac{1}{4}\cos 3\alpha$

حل:

$$a)\ \frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \tan A$$

$$\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = -\frac{2\sin A\cos A}{1+\cos^2 A-\sin^2 A} = \frac{2\sin A\cos A}{\sin^2 A+\cos^2 A+\cos^2 A-\sin^2 A} = \frac{2\sin A\cos A}{2\cos^2 A} = \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$$

$$b)\ \frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} = \tan^2 A = \frac{1-(1-2\sin^2 A)}{1+(2\cos^2 A-1)} = \frac{1-1+2\sin^2 A}{1+2\cos^2 A-1} = \frac{2\sin^2 A}{2\cos^2 A} = \tan^2 A$$

$$c)\ \tan A+\cot A = 2\csc 2A = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos A\sin A} = \frac{1}{\cos A\sin A}$$

حال صورت و مخرج طرف راست کسر را ضرب عدد 2 می‌کنیم:

$$\tan A+\cot A = \frac{2}{2\sin A\cos A} = \frac{2}{\sin 2A}$$

چون کوسیکنت یک زاویه معکوس ساین همان زاویه است؛ پس:

$$\tan A+\cot A = 2\csc 2A$$

$$d)\ \frac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\tan\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}$$

هر کدام از صورت و مخرج کسر فوق را به صورت جداگانه انکشاف می‌دهیم:

$$1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)$$

$$1-2\cos^2\frac{A}{2}+1+2\cos^2\frac{B}{2}-1-\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$=1-2\cos^2\frac{A}{2}+1+2\cos^2\frac{B}{2}-1-(2\cos^2\frac{A}{2}-1)(2\cos^2\frac{B}{2}-1)+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cdot2\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}$$

$$=1-2\cos^2\frac{A}{2}+1+2\cos^2\frac{B}{2}-1-(4\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}-2\cos^2\frac{A}{2}-2\cos^2\frac{B}{2}+1)+4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=1-2\cos^2\frac{A}{2}+1+2\cos^2\frac{B}{2}-1-4\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}+2\cos^2\frac{A}{2}+2\cos^2\frac{B}{2}-1+4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=4\cos^2\frac{B}{2}-4\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}+4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=4\cos^2\frac{B}{2}(1-\cos^2\frac{A}{2})+4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=4\cos^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{A}{2}+4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=4\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}+4\sin\frac{A}{4}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=4\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2})$$

$$=4\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2})$$

$$\boxed{=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})}$$

حال به انکشاف مخرج مطابقت می‌پردازیم:

$$1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)=1+2\cos^2\frac{A}{2}-1-2\cos^2\frac{B}{2}+1-\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$=2\cos^2\frac{A}{2}-2\cos^2\frac{B}{2}+1-(2\cos^2\frac{A}{2}-1)(2\cos^2\frac{B}{2}-1)+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=2\cos^2\frac{A}{2}-2\cos^2\frac{B}{2}+1-(4\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}-2\cos^2\frac{A}{2}-2\cos^2\frac{B}{2}+1)+4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=2\cos^2\frac{A}{2}-2\cos^2\frac{B}{2}+1-4\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}+2\cos^2\frac{A}{2}+2\cos^2\frac{B}{2}-1+4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=4\cos^2\frac{A}{2}-4\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}+4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=4\cos^2\frac{A}{2}(1-\cos^2\frac{B}{2})+4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=4\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}+4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2})$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cdot\sin(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})$$

در نتیجهٔ انکشاف مخرج کسر مطابقت یافتیم که:

$$\boxed{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)=4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cdot\sin(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})}$$

حال قیمت‌های صورت و مخرج را در اصل مطابقت به جای شان قرار می‌دهیم:

$$\frac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\frac{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})}{4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\tan\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}$$

بنابر آن به اثبات رسید که: $\frac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\tan\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}$

$$e)\ \frac{\cos A}{1-\sin A}=\tan(45+\frac{A}{2})=\tan(45^\circ+\frac{A}{2})=\frac{\tan 45^\circ+\tan\frac{A}{2}}{1-\tan 45^\circ\cdot\tan\frac{A}{2}}=\frac{1+\tan\frac{A}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}}=\frac{1+\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{1-\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}$$

$$=\frac{\frac{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{\frac{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}=\frac{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}$$

حال صورت و مخرج کسر را ضرب مزدوج صورت می‌کنیم:

$$\tan(45^\circ+\frac{A}{2})=\frac{(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2})}{(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2})}\cdot\frac{(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2})}{(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2})}$$

$$\tan(45^\circ+\frac{A}{2})=\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}-2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{1-2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

پس: $\tan(45^\circ+\frac{A}{2})=\frac{\cos A}{1-\sin A}$

$$f)\ \cos\alpha\cdot\cos(60^\circ-\alpha)\cdot\cos(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{4}\cos 3\alpha$$

$$\cos\alpha\cdot(\cos 60^\circ\cos\alpha+\sin 60^\circ\sin\alpha)(\cos 60^\circ\cos\alpha-\sin 60^\circ\sin\alpha)$$

$$=\cos\alpha\cdot(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha)(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha)=\cos\alpha\cdot(\frac{1}{4}\cos^2\alpha-\frac{3}{4}\sin^2\alpha)$$

$$=\frac{1}{4}\cos^3\alpha-\frac{3}{4}\cos\alpha+\frac{3}{4}\cos^3\alpha=\cos^3\alpha-\frac{3}{4}\cos\alpha=\frac{1}{4}(\underbrace{4\cos^3\alpha-3\cos\alpha})$$

چون $4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\cos 3\alpha$ است؛ پس:

$$\boxed{\cos\alpha\cdot\cos(60^\circ-\alpha)\cdot\cos(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{4}\cos 3\alpha}$$

7- افاده های مثلثاتی زیر را ساده نمایید:

$a)\ \dfrac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$ $\qquad b)\ 1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha$

$c)\ \cos 4x + 2\sin^2 2x$ $\qquad d)\ (\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sin^2 x)^2$

کمک:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\alpha=\beta \ \Rightarrow\ \tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \ \Rightarrow\ \boxed{\tan(15+15)=\frac{\tan 15+\tan 15}{1-\tan 15\cdot\tan 15}}$$

حل a):

$$a)\ \frac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}=\frac{\tan 15^\circ+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ\cdot\tan 15^\circ}=\tan(15^\circ+15^\circ)=\tan 30^\circ=\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل b): میدانیم که $1-2\sin\alpha=\cos 2\alpha$ است؛ پس:

$$b)\ 1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=\cos 2\alpha+\cos 2\alpha=2\cos 2\alpha$$

حل c):

$$c)\ \cos 4x+2\sin^2 2x$$
$$\cos 4x=\cos(2x+2x)=\cos^2 2x-\sin^2 2x$$
$$1-\sin^2 2x-\sin^2 2x=1-2\sin 2x\ \ ...\ *$$
$$\cos 4x+2\sin^2 2x=1-2\sin^2 2x+2\sin^2 2x=1$$

حل d):

$$d)\ (\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x)^2=(\cos^2 x-\sin^2 x+2\sin x\cos x)^2$$
$$(\cos 2x+\sin 2x)^2=\cos^2 2x+2\sin 2x\cos 2x+\sin^2 2x$$
$$\cos^2 2x+\sin^2 2x+2\sin 2x\cos 2x=1+2\sin 2x\cos 2x$$
$$=1+2\{(2\sin x\cos x)(\cos^2 x-\sin^2 x)=1+2\{2\sin x\cos^3 x-2\sin^3 x\cos x\}$$
$$=1+4\sin x\cos^3 x-4\sin^3 x\cos x)=1+\sin 4x$$

8 – آیا مساوات $2\sin^2 x-\cos x=2\cos 2x+\sin x$ یک مطابقت مثلثاتی است یا یک معادلهٔ مثلثاتی؟ با دلیل واضح سازید.

حل: برای اینکه ثبوت نماییم رابطهٔ بالا یک مطابقت است یا معادله، یکعده قیمت‌های زوایا را در آن وضع می کنیم، هرگاه تمام قیمت‌های وضع شده در رابطه صدق کند، در آن صورت رابطه یک مطابقت است، در غیرآن یک معادله می‌باشد.

$$x=30^\circ\ ,\ 45^\circ\ ,\ 60^\circ\ ,\ 90^\circ\ ,\ 100^\circ\ ,\ 120^\circ\ ,\ 80^\circ\ ,\ 230^\circ\ ,\ 280^\circ\ ,\ 360^\circ$$

$$x=30^\circ\ \Rightarrow\ 2(\sin 30^\circ)^2-\cos(30^\circ)=2\cos(2\cdot 30^\circ)+\sin 30^\circ=2\cdot\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow 1-\sqrt{3}\neq 3$$

$$x=45^\circ \Rightarrow 2\sin(45^\circ)^2-\cos(45^\circ)=2\cos(2\cdot 45^\circ)+\sin 45^\circ$$

$$2\frac{2}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \frac{2-\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2-\sqrt{2}\neq\sqrt{2}$$

$$x=60^\circ \Rightarrow 2\sin(60^\circ)^2-\cos 60^\circ=2\cos(2\cdot 60^\circ)+\sin 60^\circ$$

$$2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-\frac{1}{2}=2(-\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2\cdot\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$1\neq\frac{-2+\sqrt{3}}{2}$ یا $2\neq -2+\sqrt{3}$

طوریکه معلوم شد به گذاشتن چند قیمت مساوات صدق نمی‌کند؛ بنابرآن رابطهٔ فوق مطابقت نیست، بلکه یک معادله است.

9- معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید:

$a)\ \cos^2 x+\cos^4 x=0 \qquad b)\ \tan^2 x-4\tan x+3=0$

$c)\ 4\cos\beta-2=0 \qquad d)\ \cos x-\sqrt{3}\sin x=1$

$e)\ \cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x=-1$

حل $a)$:

$a)\ \cos^2 x+\cos^4 x=0$

$$\cos^2 x(1+\cos^2 x)=0 \Rightarrow \cos^2 x=0$$

$$\cos x=0 \Rightarrow x=arc\cos 0^\circ=\frac{\pi}{2}$$

ممکن نیست $\cos x=\sqrt{-1}$ یا $\cos^2 x+1=0 \Rightarrow \cos^2 x=-1$

ست حله عبارت است از:

$$A_1=\left\{x/x=\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+2\pi,\frac{\pi}{2}+4\pi,\ \ldots\ ,\right\}$$

$$A_2=\left\{x/x=2\pi-\frac{\pi}{2},4\pi-\frac{\pi}{2},\ \ldots\ ,\right\}$$

$$A=A_1\cup A_2=\left\{x/x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\right\}$$

حل $b)$: اگر $\tan x=y$ وضع شود:

$b)\ \tan^2 x-4\tan x+3=0$

$$y^2-4y+3=0$$

$$(y-3)(y-1)=0 \Rightarrow y_1=3 \quad , \quad y_2=1$$

$$\tan x=1 \Rightarrow x_1=\tan^{-1}1=45^\circ=\frac{\pi}{4}$$

$$\tan x=3 \Rightarrow x_2=\tan^{-1}3=71.56^\circ$$

حل c):

$$c)\ 4\cos\beta-2=0$$

$$4\cos\beta=2\div 4$$

$$\cos\beta=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \hat{\beta}=\arccos\frac{1}{2}\ \ ,\ \ \hat{\beta}=60^\circ=\frac{\pi}{3}$$

$$A_1=\left\{\beta/\beta=\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},+2\pi,\frac{\pi}{3}+4\pi,\ ...\right\}$$

$$A_2=\left\{\beta/\beta=2\pi-\frac{\pi}{3},4\pi-\frac{\pi}{3},\ ...\right\}$$

$$A_1\cup A_2=\left\{\ \beta/\beta=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\right\}$$

حل d):

$$d)\ \cos x-\sqrt{3}\sin x=1$$

$$\cos x-\sqrt{3}(\sqrt{1-\cos^2 x})=1$$

$$-\sqrt{3}(\sqrt{1-\cos^2 x}=1-\cos x\ \ /\cdot(-1)$$

$$\sqrt{3}(\sqrt{1-\cos^2 x}=\cos x-1$$

اطراف معادله را مربع می‌سازیم:

$$3(1-\cos^2 x)=\cos^2 x-2\cos x+1$$

$$-4\cos^2 x+2\cos x+2=0\ \ /\cdot(-1)\ \ \Rightarrow\ \ \ \ 4\cos^2 x-2\cos x-2=0$$

$\cos x=y$ را وضع می کنیم:

$$4y^2-2y-2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=4-4\cdot 4\cdot(-2)=4+32=36$$

$$\sqrt{\Delta}=\pm\sqrt{36}\ \ ,\ \ \ \Delta=\pm 6$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+2+6}{8}=\frac{8}{8}=1$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-6}{8}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos x=y_1=1\ \Rightarrow\ x=\cos^{-1}1\ \Rightarrow\ \hat{x}_1=0^\circ$$

$$\cos x=y_2=-\frac{1}{2}\ \ \Rightarrow\ x=120^\circ$$

حل e):

$$e)\ \cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x=-1$$

$$\cos x+3\cos x\sqrt{1-\cos^2 x}+1=0$$

$$\cos^2 x+1=-3\cos x\sqrt{1-\cos^2 x}$$

اطراف را مربع می سازیم:

$$\cos^4 x + 2\cos^2 x + 1 = 9\cos^2 x \cdot (1-\cos^2 x)$$

$$\cos^4 + 2\cos^2 x + 1 - 9\cos^2 x + 9\cos^4 x = 0 \;\; \Rightarrow \;\; 10\cos^4 x - 7\cos^2 x + 1 = 0$$

$$\cos^2 x = y \;\; \Rightarrow \;\; 10y^2 - 7y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4\cdot 10(1) = 49 - 40 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} \;\; , \quad \Delta = \pm 3$$

$$y_1 = \frac{7+3}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \quad , \quad y_2 = \frac{7-3}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \;\; \Rightarrow \;\; \cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \quad , \quad x_{1,2} = \arccos(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{5} \;\; \Rightarrow \;\; \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \quad , \quad x_{3,4} = \arccos(\pm\frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$x_1 = \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$x_2 = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 135$$

$$x_3 = \arccos(\frac{1}{\sqrt{5}}) = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5} = 63^\circ$$

$$x_4 = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{5}}) = \arccos(\frac{-\sqrt{5}}{5}) = 116^\circ$$

10- سیستم معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$a) \begin{cases} \tan x + \tan y = 1 \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad\qquad b) \begin{cases} \sin(x+y) = \cos(x-y) \\ \tan x - \tan y = 1 \end{cases}$$

حل a):

$$a) \;\; \tan x + \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x\cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = 1.$$

$$= \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = 1 \;\; \Rightarrow \;\; \sin(x+y) = \cos x \cos y$$

چون در خود سؤال $\cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ است؛ پس:

$$\sin(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\; \Rightarrow \;\; \boxed{x+y = 45^\circ = \frac{\pi}{4}}$$

از مثلثات داریم:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\cos\frac{\pi}{4} + \cos(x-y)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x(x-y)\right\} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\cos(x-y)$$

چون $\cos x\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ است؛ پس:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cos(x-y)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cos(x-y)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{2}\cos(x-y)=\frac{\sqrt{2}(2-1)}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\qquad /\cdot 2$$

$$\cos(x-y)=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 2=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x-y=45^\circ=\frac{\pi}{4}$$

$$x+y=\frac{\pi}{4}\quad ....\ (1)$$

$$x-y=\frac{\pi}{4}\quad ....\ (2)$$

$$2x=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{4}\quad\Rightarrow\quad x+y=\frac{\pi}{4}$$

$$y=\frac{\pi}{4}-x\quad\Rightarrow\quad y=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\quad\Rightarrow\quad\boxed{y=0^\circ}$$

حل b):

$$b)\begin{cases}\sin(x+y)=\cos(x-y)\\ \tan x-\tan y=1\end{cases}$$

$$\tan x-\tan y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}=1$$

$$\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}=1$$

$$\sin(x-y)=\cos x\cos y\ \ ...\ *$$

از خود سؤال داریم: $\sin(x+y)=\cos(x-y)$

اطراف معادله را انکشاف می‌دهیم: $\sin x\cos y+\cos x\sin y=\cos x\cos y+\sin x\cdot\sin y$

قیمت $\cos x\cos y$ را از رابطهٔ * به جایش می گذاریم:

$$\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin(x-y)+\sin x\sin y$$

$$\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin x\cos y-\cos x\sin y+\sin x\sin y$$

$$\sin x\cos y+\cos x\sin y-\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin x\sin y$$

$$2\cos x\sin y=\sin x\sin y$$

اطراف را تقسیم $\sin x\sin y$ می‌کنیم:

$$2\frac{\cos x\sin y}{\sin x\sin y}=1$$

$$2\frac{\cos x}{\sin x}=1\quad\Rightarrow\quad 2\cot x=1\quad\Rightarrow\quad\cot x=\frac{1}{2}$$

چون $\cot x=\frac{1}{\tan x}$ است؛ پس: $\tan x=2\quad\Rightarrow\quad\boxed{x=63.43^\circ}$

از سؤال داریم: $\tan y=\tan x-1\quad\Rightarrow\quad\tan y=2-1\quad\Rightarrow\quad\tan y=1\quad\Rightarrow\quad\boxed{y=\frac{\pi}{4}=45^\circ}$



فصل سوم‌هندسهٔ فضایی

عنوان درس: مفاهیم اساسی و اکسیوم‌ها

صفحهٔ کتاب (97)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم مفاهیم اساسی و اکسیوم‌ها را بدانند. • فرق مفاهیم اساسی و اکسیوم‌ها را بکنند. • از مفاهیم اساسی و اکسیوم‌ها در زنده‌گی روزمره استفاده نمایند.
روش های تدریس	کار گروهی انفرادی، سؤال و جواب
مواد ممد درسی	چارت مستوی
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس، درس اول فصل جدید را چنین آغاز نماید: • کی عالم مشهور ریاضی را به نام اقلیدس می‌شناسد وی در کدام شاخهٔ ریاضی دسترسی داشت؟ • به صورت عمومی هندسه اقلیدسی جهانیان را در کدام قسمت خدمت نموده است؟ • هرگاه شاگردان جواب بگویند خوب، در غیر آن معلم برای شان بگوید که اقلیدس یونانی از سال 325 تا 270 قبل از میلاد در شهر اسکندریهٔ مصر زنده‌گی کرده که یک عالم مشهور هندسه مسطحه و فضایی بوده او در تمام عمر خود، در ریاضیات، به خصوص در قسمت هندسه خدمت زیادی نموده که تا الحال جهانیان از آن در امور زنده‌گی روزمره کار میگیرند، وی دربارهٔ مفاهیم اساسی هندسی زیر تحقیق کرده است: 1. آن مفاهیم هندسهٔ دو بعدی که به‌نام هندسهٔ مسطحه یاد میشود. 2. آن مفاهیم هندسهٔ سه بعدی که به نام هندسهٔ فضایی یاد میشود.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

- معلم محترم دربارهٔ مفاهیم اساسی مانند اصطلاحات اولیه، قضایا و اکسیوم‌ها به صورت مختصر معلومات دهد و کوشش نماید در صورت امکان هر بیان را با مثال مربوط توضیح دهد. به همین ترتیب دربارهٔ اصطلاحات اولیهٔ قبول شده(تعریف ناشده) با سهم فعال شاگردان مرحله به مرحله کار کند تا آنها به مفهوم واقعی هر کدام از بیان‌ها بفهمند. اصل‌های اول، دوم و سوم توسط شاگردان بیان شوند، در صورت مشکلات معلم کمک و رهنمایی کند؛ سپس معلم محترم مفهوم مستوی را توسط مثال‌های سادهٔ محیطی ارائه بدارد و مستوی را در شکل یا توسط چارت که از قبل تهیه کرده است به شاگردان نشان دهد.

- معلم محترم میتواند صفحهٔ یک پارچه کاغذ، روی تخته وسطح آب ایستاده را به حیث مستوی قبول کند و اکسیوم‌ها را به طور عملی کار نماید.

به همین قسم دربارهٔ اکسیوم‌های مستوی‌های متقاطع که یک فصل مشترک را به وجود می‌آورند معلومات دهد.

در پایان در مورد هندسهٔ مسطح و فضایی چنین معلومات دهد:

در هندسهٔ مسطح ضرورت به رسم مستوی نبوده؛ ولی در هندسهٔ فضایی ضرورت به رسم مستوی است.

در هندسهٔ فضایی طور معمول مستوی را توسط متوازی‌الاضلاع، مستطیل و یا یک سطح هموار نشان می‌دهند. مستوی‌هایی که در شکل نشان داده شده اند به همین وسعت نبوده؛ بلکه تا لایتناهی امتداد دارد و به شکل یک سطح هموار نشان داده شده است. اکسیوم‌هایی که در هندسهٔ مسطح موجود اند در هندسهٔ فضایی نیز از آنها استفاده می‌شود. در هندسهٔ فضایی اکسیوم‌های خاص فضا نیز وجود دارد که هر کدام در کتاب بیان شده است.

تحکیم درس: (7) دقیقه

- معلم محترم برای تحکیم بخشیدن درس دربارهٔ اصطلاحات اولیه و اکسیوم‌ها از شاگردان به طور انفرادی سؤال کند.
- معلم کوشش نماید تا جواب‌ها را از شاگردان به دست بیاورد، در صورت مشکلات آنها را کمک و رهنمایی نماید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه معلم محترم از آموزش و یادگیری شاگردان اطمینان حاصل نماید، سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد و جواب‌ها را دریافت نماید:

1. دلیل و برهان چیست؟
2. برای صحت قضیه به چی چیزها ضرورت است؟
3. کی اکسیوم اول خط را می‌گوید؟
4. برای ارائهٔ مستوی، کی یک مثال گفته می‌تواند؟

معلم در صورت مشکلات کمک کند.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 98

1 – واضح سازید که چرا میز سه پایه نسبت به میز چهار پایه استوارتر است.

حل: طوری‌که می‌دانیم از هر سه نقطه یک مستوی می‌گذرد؛ بنابرآن بعضی اوقات یکی از چهار پایهٔ میز چهارپا به سطح تماس پیدا نمی‌کند از همین رو میز سه پایه نظر به میز چهار پایه استوار تر می‌باشد.

2 – نقطهٔ، خط و مستوی را چرا اصطلاح اولیه می نامند؟

حل: طوری‌که نقطه، خط و مستوی را به حیث یک مفهوم ذهنی می‌شناسیم و تا حال تعریف نشده اند، بنابرآن، آنها را به حیث اصطلاح اولیه می‌شناسند. همین قسم علامهٔ ممیزهٔ یک خط مستقیم اینست که از دو نقطهٔ داده شده تنها و تنها یک خط مستقیم عبور می‌کند و بس و کدام تعریف خاص ندارد. از همین سبب خط مستقیم را نیز به حیث یک اصطلاح اولیه می پذیریم.

3 – از سه نقطه چند مستوی عبور خواهد نمود که هر سه نقطه شامل آن باشد؟

حل: از سه نقطه که به امتداد یک خط مستقیم نباشند تنها و تنها یک مستوی می‌گذرد. تذکر باید داد که از دو نقطه مستوی‌های بی‌شمار عبور می‌کند.



فصل سوم هندسۀ فضایی

عنوان درس: خط و مستوی در فضای سه بُعدی

صفحۀ کتاب (99)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم مستوی و خط را در فضای سه بُعدی بدانند. • بفهمند که در یک فضای سه بُعدی زنده‌گی می‌نماییم. • در فضای سه بُعدی خط و مستوی را تشخیص کنند. • در فضای سه بُعدی امور زنده‌گی را انجام دهند.
روش های تدریس	کار گروهی، کار انفرادی، سؤال و جواب
مواد ممد درسی	قلم‌ها یا خمچه‌ها، ورق‌های کاغذی
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، شاگردان را متوجه قسمت ورودی کتاب ساخته و چنین بپرسد: • دو قلم در فضای بین هم چند حالت را خواهند داشت؟ • دو کتاب در فضا بین هم چند حالت را خواهند داشت ؟ • یک قلم و یک کتاب یا یک خمچه و یک ورق کاغذی در فضا چند حالت را خواهند داشت؟ - معلم کوشش نماید که جواب‌ها را از شاگردان بشنود، در غیر آن خود سه حالت، متقاطع، منطبق و موازی را توضیح و تشریح کند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

- معلم محترم مفهوم فضای سه بُعدی را که یکی از اصطلاحات اولیۀ تعریف ناشده است به شاگردان بگوید و یادآوری کند: فضا مجموعۀ نقاط لایتناهی است. حالت نسبی یک خط مستقیم و یک مستوی که بالترتیب دارای یک بُعد، و دو بُعد اند و هر یک جزء فضا می‌باشد به طور عملی چنین نشان دهد که روی ورق کاغذ به صورت مستوی و قلم را به حیث خط مستقیم در نظر بگیرد و حالت را طور عملی تطبیق کند.

- معلم شاگردان را به سه گروه تقسیم کند به آنها بگوید:

- گروه اول قلم را به روی کاغذ طوری بگذارد که قلم از کاغذ بگذرد؛ یعنی کاغذ را سوراخ کند و حالت را بیان کند.
- گروه دوم قلم را روی کاغذ مستوی شکل طوری بگذارد که تمام نقاط قلم و کاغذ باهم شریک شوند و حالت را بیان کند.

- گروه سوم قلم و کاغذ مستوی شکل را در فضا طوری بگیرد که هیچ نقطهٔ مشترک نداشته باشند و امتداد یافتهٔ آنها هم یکدیگر را قطع نکنند و حالت آن را بیان کند.

هرگاه شاگردان مشکلی داشته باشند معلم کمک و رهنمایی نموده و به صورت عملی هر سه حالت را نشان دهد.

- معلم شکل هر حالت را به روی تخته رسم کند، تا شاگردان حالت های متقاطع منطبق و موازی را در رسم ببینند وبشناسند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

- معلم محترم جهت تحکیم بهتر درس به صورت انفرادی از شاگردان چنین بپرسد:

- هرگاه مستوی و خط مستقیم یک به دیگر منطبق باشند در این صورت چند نقطهٔ مشترک خواهند داشت؟
- هرگاه مستوی و خط مستقیم باهم متقاطع باشند چند نقطهٔ مشترک خواهند داشت؟
- هرگاه مستوی و خط مستقیم هیچ نقطهٔ مشترک نداشته باشند در این صورت کدام حالت را اختیار می‌کنند؟

- معلم کوشش نماید که جواب‌ها را از شاگردان دریافت بدارد شاگردان شکل‌ها را رسم نمایند، در صورت مشکلات کمک و رهنمایی کند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه معلم محترم از آموزش و یادگیری شاگردان اطمینان حاصل نماید، سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد و جواب‌ها را دریافت بدارد:

1. کی گفته میتواند هرگاه یک خط مستقیم و مستوی یک نقطهٔ مشترک داشته باشند بین هم کدام حالت را دارند؟
2. کی گفته میتواند، آیا چنان یک خط مستقیم و مستوی را رسم کرده میتوانیم که یک به دیگر منطبق باشند؟
3. کی میتواند چنان یک خط مستقیم و مستوی را رسم کند که یک به دیگر موازی باشند؟

فصل سوم هندسۀ فضایی

عنوان درس: اوضاع نسبی دو خط مستقیم و دو مستوی با یکدیگر

صفحۀ کتاب (100)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی	شاگردان قادر شوند تا:
- دانشی	• مفهوم حالت‌های نسبی دو خط مستقیم و دو مستوی را بدانند.
- مهارتی	• حالت‌های دو خط مستقیم را رسم کنند.
- ذهنیتی	• حالت‌های دو مستوی را رسم کنند.
	• دانش و مهارت‌های فوق را در زنده‌گی روزمره به کار ببرند.
روش های تدریس	کار گروهی، انفرادی، سؤال و جواب
مواد ممد درسی	ورق‌های کاغذ، خمچه
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، تدریس را با سؤالهای زیر آغاز نماید: • کی متیواند حالت خطوط موازی را در فضا نشان دهد؟ • کی میتواند حالت خطوط متقاطع را در فضا نشان دهد؟ • کی دو مستوی منطبق را در فضا نشان داده میتواند؟ - معلم کوشش نماید که جواب‌ها را از شاگردان دریافت کند، در غیر آن با استفاده از ورق‌های کاغذ و خمچه مثالها، گفته و طور عملی انجام دهد.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

- معلم محترم به شاگردان بگوید که روی میز را به حیث یک مستوی و خمچه‌ها را به حیث خطوط مستقیم در نظر بگیرند؛ سپس یک شاگرد را بخواهد تا این دو خمچه را روی میز طوری بگذارد، و که هیچ نقطۀ مشترک نداشته و امتداد یافتۀ آنها هم یکدیگر را قطع نکنند. اگر شاگرد توانست خوب، در غیر آن معلم کمک کند. به همین ترتیب معلم یک شاگرد داوطلب دیگری را بخواهد که همین دو خمچه را روی میز طوری بگذارد که یک نقطۀ مشترک پیدا کنند؛ سپس یک شاگرد داوطلب سومی را بخواهد که یک خمچه را روی میز و خمچۀ دومی را در خارج میز طوری بگذارد که نقطۀ مشترک نداشته و حالت متنافر را نشان دهند.

- معلم در پایان سه حالت را که دو خط مستقیم(موازی، متقاطع، متنافر) در یک مستوی بایکدیگر دارند موافق با کتاب درسی تشریح و هر سه حالت را به تخته رسم و نشان دهد.

- معلم به همین قسم سه شاگر داوطلب را به نوبت بخواهد طوری که دو ورق کاغذ که هر کدام را بـه شـکل مسـتوی فرض نمایند برای شان بدهد، تا سه حالت مستوی(متقـاطع، منطبـق و مـوازی) را بایکـدیگر نشـان دهنـد، در صـورت مشکلات معلم کمک و رهنمایی کند.

در پایان معلم محترم هر سه حالت را با استفاده از شکل های کتاب تشریح نماید.

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نماید که هر کدام از گروه هر سه حالـت خـط مسـتقیم و مسـتوی را و هم حالت‌های دو مستوی را بین هم در کتابچه‌های خود رسم نمایند، معلم محترم از جریان کار مراقبت نماید.

- معلم نمایندهٔ دو گروه را بخواهد تا فعالیت گروهی خود را به دیگران معلومات بدهند در صورت اشتباه کدام گـروه آنها را متوجه اشتباه شان ساخته و شکل درست را نشان دهد.

تحکیم درس: (7) دقیقه

- معلم محترم جهت تحکیم و آموزش بهتر درس، سؤالهای زیر را به شاگردان داده و جـواب‌هـای درسـت را از آنهـا دریافت بدارد.

- هرگاه دو خط مستقیم کم از کم دو نقطهٔ مشترک داشته باشند کدام حالت را دارا اند؟
- هرگاه دو مستوی کم از کم سه نقطهٔ مشترک داشته باشند، طوری که نقاط به امتداد یک خـط مسـتقیم واقـع نباشند چی نوع مستوی‌های گفته می‌شوند؟
- هرگاه دو خط مستقیم هیچ نقطهٔ مشترک نداشته باشند کدام نوع خطوط گفته می‌شوند؟

- معلم کوشش کند تا جوابها را شاگردان بگویند در صورت مشکلات کمک نماید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

- معلم محترم برای اینکه خود را از یادگیری شاگردان مطمئن سازد با طرح سؤالهای زیر، ایشان را ارزیابی نماید:

1. از یک نقطه در فضا چند خط مستقیم می‌گذرد؟
2. از دو نقطه چند مستقیم می‌گذرد؟
3. در کدام حالت دو مستوی به یکدیگر منطبق شده می‌توانند؟
4. تقاطع دو مستوی یک نقطه است یا یک خط؟

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 102

$1-$نقاط T و R بالای مستوی p واقع اند نظر به کدام دلیل خط $\overline{RT}$ در مستوی p واقع است؟

حل: میدانیم که از دو نقطه تنها و تنها یک خط مسـتقیم میگـذرد؛ از اینکـه از اتصـال نقـاط T و R قطعـه خـط RT عرض وجود می‌کند؛ پس گفته میتوانیم قطعه خط مستقیم متوصلهٔ آن دو نقطه، در مستوی P واقع است.

2 – اگر خط مستقیم Δ در مستوی P واقع نباشد خط مستقیم Δ مستوی P را در چند نقطه قطع خواهد نمود؟

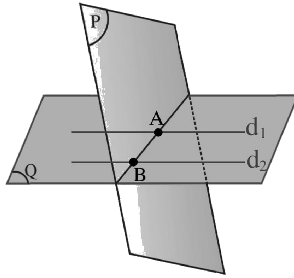
حل: هرگاه خط مستقم Δ در مستوی P واقع نباشد در این صورت مستوی P را در یک نقطه قطع کرده میتواند.

3 – اگر خط مستقیم AB و مستوی p دو نقطهٔ مشترک M و K را داشته باشند آیا خط مستقیم AB در مستوی p واقع است؟

حل: هرگاه مستقیم AB و مستوی P دو نقطهٔ مشترک داشته باشند؛ پس تمام نقاط مستقیم AB در مستوی P واقع است یا گفته می‌شود که خط مستقیم با مستوی P منطبق و یا خط مستقیم در مستوی واقع است.

4- نقاط B, A و C به روی مستوی P قرار دارند و هم نقاط B, A و C به روی مستوی P' قرار دارند، مستوی P و P' با هم چی ارتباط دارند؟

حل: دیده می‌شود که مستوی‌های P و P' دارای سه نقطهٔ مشترک اند؛ طوری‌که نقاط به امتداد یک خط مستقیم نیستند؛ پس مستوی‌های P و P' به یکدیگر منطبق می‌باشند.



فصل سوم هندسهٔ فضایی

عنوان درس: خطوط مستقیم موازی در فضا

صفحهٔ کتاب (103)

وقت تدریس(2 ساعت درسی) قسمت اول

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • به مفهوم خطوط مستقیم موازی در فضا بفهمند. • خطوط مستقیم موازی را در فضا رسم کنند. • از مفاهیم فوق در وقت ضرورت استفاده به‌عمل آورده احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	کار گروهی، کار انفرادی، سؤال و جواب
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی توجه شاگردان را به عنوان و شکل ورودی درس جلب ساخته سؤال کند: • در شکل ورودی چند مستوی دیده می‌شود؟ • در شکل ورودی چی نوع مستقیم‌ها دیده می‌شوند؟ • مستقیم‌ها با یکدیگر و همچنان مستوی‌ها بایکدیگر چند حالت دارند؟ هر گاه شاگردان جواب گفتند خوب، در غیر آن معلم در موضوع معلومات مختصر داده و به فعالیت درس آغاز نماید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

- معلم قبل از همه اکسیوم‌های خطوط موازی را از شاگردان بپرسد ممکن شاگردان جواب بگویند.

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نماید تا فعالیت صفحهٔ 103 کتاب درسی را بعد از بحث و مذاکره در گروه‌های مربوط انجام دهند. بعد از انجام فعالیت نماینده‌های سه گروه را به ترتیب بخواهد تا فعالیت انجام دادهٔ گروه خویش را به دیگران تشریح نمایند. در صورت اشتباه کدام گروه، اشتباه توسط گروه دیگر اصلاح شود.

- معلم قضیه را که از یک نقطهٔ خارج یک خط مستقیم تنها و تنها خط مستقیم موازی به آن رسم نموده میتوانیم و بس، بیان نماید. برای فهمیدن زیادتر شاگردان یک خط مستقیم d و یک نقطهٔ A که روی مستقیم واقع نباشد به تخته چنین رسم کند:

- معلم سه شاگرد داوطلب را به نوبت بخواهد و به آنها بگوید، یکی آن از نقطهٔ A یک خط عمود بـه d و دومـی از نقطهٔ مذکور خط غیر موازی(متقاطع) و سومی آنها یک خط موازی به d رسم نماید و بپرسد:

- کی گفته می‌تواند که از یک نقطهٔ A به یک خط داده شده چند موازی رسم کرده میتوانیم؟

اگر شاگردان جواب گفتند خوب در غیر آن معلم محترم بگوید که از یک نقطه به یـک خـط تنهـا و تنهـا یـک خـط موازی رسم شده می‌تواند و بس، ولی از نقطـهٔ مـذکور لایتنـاهی خطـوط کـه بـا خـط d متقـاطع باشـند رسـم کـرده می‌توانیم.

- معلم یاد آور شود که از یک نقطهٔ A و یک خط مستقیم d تنها یک مستوی عبور می‌نماید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

- معلم محترم جهت تحکیم بهتر درس یک شاگرد را بخواهد که شکل قضیهٔ مربوط را روی تخته رسم نمایـد، دیگـر شاگردان عین کار را در کتابچه‌های خود انجام دهند در صورتی که کدام شاگرد قضیه را ثبـوت کـرده بتوانـد ثبـوت نماید، در غیر آن معلم با استفاده از شکل، قضیه را ثبوت و شاگردان را بفهماند، همچنان معلم محترم به طـور انفـرادی دربارهٔ قضیه از شاگردان سـؤال کنـد و جوابهـا را بـه شـکل شـفاهی دریافـت بـدارد، در صـورت مشـکلات کمـک و رهنمایی نماید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

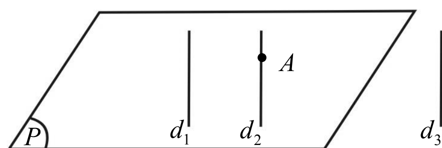
- معلم محترم برای اینکه مطمئن شود آیا آموزش صورت گرفته اسـت یـا خیـر؟ شـاگردان را بـا طـرح سـؤالهای زیـر ارزیابی نماید:

1. از یک نقطهٔ خارجی یک مستقیم چند موازی به آن خط مستقیم رسم کرده میتوانیم؟
2. کی میتواند از یک نقطهٔ خارجی به یک خط مستقیم، خط موازی رسم نماید؟

- معلم کوشش کند که جوابها را از شاگردان دریافت کند در صورت مشکلات خود کمک نماید.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 104

1 – هرگاه دو خط مستقیم به یک خط مستقیم سومی موازی باشند، ثبوت کنید که خطوط مستقیم مذکور بـین خـود نیز موازی می‌باشند.



حل: طوریکه $d_1 // d_3$ و $d_2 // d_3$ است، میخواهیم ثبوت نماییم که $d_1 // d_2$ است، هرگاه خط d_1 موازی با خط d_2 باشد؛ پس هر دو در مستوی P واقع اند و اگر d_1 موازی به d_2 نباشد در این صورت مستوی P که خط d_1 در آن واقع است خط d_2 را در نقطهٔ A قطع می کند.

از طرف دیگردیده می‌شود که خط d_2 موازی به خطوط d_3 است؛ پس d_3 مستوی P را نیز باید قطع کند در حالیکه خط d_3 مستوی P را قطع کرده نمی‌تواند؛ زیرا که d_1 و d_3 با هم موازی بوده و در مستوی P واقع می‌باشد.

از طرف دیگر میدانیم $d_2 // d_3$ است؛ پس مستوی P خط d_2 را هم قطع کرده نمیتوانند. در این صورت گفته میتوانیم که خطوط d_1 و d_2 در مستوی P واقع بوده و باهم موازی اند.
اکنون نشان میدهدیم که خطوط d_1 و d_2 با یکدیگر نقطهٔ مشترک ندارد. فرض میکنیم که خطوط d_1 و d_2 نقطهٔ مشترک (O) را دارا اند. در این صورت میتوانیم از نقطهٔ (O) دو موازی را به d_3 رسم نماییم که این خلاف قضیهٔ قبلی بوده و ناممکن است. در نتیجه خطوط d_1 و d_2 با یکدیگر موازی اند؛ یعنی: $d_1 // d_2$

2 – اگر مستوی های E و F باهم موازی وخط L_1 در مستوی E وخط مستقیم L_2 در مستوی F واقع باشند آیا $L_2 // L_1$ است.

حل: داریم که مستوی E و F باهم موازی و خطوط L_1 و L_2 به ترتیب در مستوی‌های E و F واقع می‌باشد؛ پس گفته میتوانیم که L_1 و L_2 باهم موازی اند.

3 – اگر مستوی E و F متقاطع و مستوی p هر دوی آنها را قطع نماید آیا فصل مشترک E و F با فصل مشترک E و p وفصل مشترک F و p موازی است؟

حل:

فصل سوم هندسهٔ فضایی

عنوان درس: خطوط مستقیم موازی در فضا

صفحهٔ کتاب (104)

وقت تدریس(2 ساعت درسی) قسمت دوم

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم دو خط موازی و دو مستوی متقاطع را بفهمند. • دو مستقیم موازی را توسط یک مستوی قطع کرده و حالت تقاطع آن را دریافت نمایند. • با انجام حالت‌های فوق احساس خوشی نموده لذت ببرند.
روش های تدریس	کار گروهی، کار انفرادی، سؤال و جواب
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، یادآوری مختصر از درس گذشته نماید و جواب‌ها را از شاگردان دریافت کند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت آخری صفحهٔ 103 کتاب درسی را در گروه‌های خویش انجام دهند. بعد از انجام فعالیت نماینده‌های سه گروه فعالیت انجام دادهٔ گروه خود را به دیگران توضیح و تشریح دهند. در صورت اشتباه کدام گروه آنها را متوجه اشتباه شان سازد. بعد فعالیت متذکره را توسط یک شاگرد داوطلب به شکل عملی چنین انجام دهد که دو خمچه را به طور موازی به سطح میز بگذارد و توسط یک ورق و کاغذ قطع نماید و از شاگرد بپرسد:

- خمچه‌ها و ورق کاغذ که در یک مستوی اند آیا تقاطع آنها یک نقطه است یا خیر؟

در صورتی که شاگردان مشکلات داشته باشند شکل را به روی تخته رسم و تشریح کنید.

در پایان قضیهٔ مربوط فعالیت را با استفاده از کتاب بیان و مفهوم آن را تشریح نماید تا شاگردان مفهوم قضیه را فهمیده و در مقابل یکدیگر استدلال کرده بتوانند. بعد یک شاگرد داوطلب را بخواهد که قضیه را با استفاده از شکل چنین ثبوت و تشریح نماید که شاگردان دیگر هم در ثبوت سهم بگیرند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

- معلم محترم جهت تحکیم بهتر درس از شاگردان به شکل انفرادی چنین بپرسد:

- هرگاه دو خط مستقیم باهم موازی باشند و یک مستوی یکی از آنها را قطع کند، آیا دیگرش را نیز قطع می‌نماید؟

- هرگاه یک مستوی دو خط مستقیم موازی را قطع کند، آیا این دو مستقیم در یک مستوی واقع اند؟ یا در مستوی‌های جداگانه؟

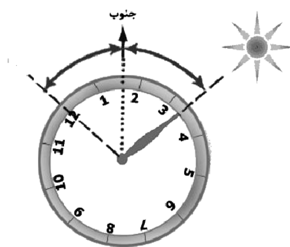
- معلم کوشش کند که جوابها را از شاگردان به دست بیاورد، در صورت مشکلات کمک و رهنمایی کند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه معلم محترم مطمئن شود که شاگردان درس را آموخته اند یا خیر؟ با سؤالهای زیر شاگردان را ارزیابی نموده و خود را مطمئن سازد:

1. هرگاه دو مستوی متقاطع باشند آیا گفته میتوانید که تقاطع آنها یک نقطه است یا خیر؟
2. آیا فصل تقاطع دو مستوی در یک مستوی واقع باشند یا در هر دو مستوی؟

فصل سوم هندسهٔ فضایی



عنوان درس: زاویه بین دو خط مستقیم در فضا

صفحهٔ کتاب (105)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • به مفهوم زاویه بین دو خط در فضا بدانند. • زاویه‌های باهم مساوی را با رسم نمودن اضلاع موازی آن حاصل نمایند. • با کسب دانش و مهارت فوق خوشی احساس کنند.
روش های تدریس	کار گروهی انفرادی، سؤال و جواب
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی توجه شاگردان را به عنوان و قسمت ورودی کتاب جلب نموده سؤال کند: • کی گفته میتواند هرگاه دوران یا حرکت ضلع دوم یک زاویه هم‌جهت عقربهٔ ساعت باشد زاویه مثبت است یا منفی؟ • کی گفته میتواند هرگاه دوران یا حرکت ضلع دوم یک زاویه، خلاف عقربهٔ ساعت باشد زاویه مثبت است یامنفی؟ - معلم کوشش نماید تا جوابها را از شاگردان به دست بیاورد، در غیر آن خود جواب بگوید؛ سپس جریان درس را آغاز نماید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند که فعالیت صفحهٔ 105 کتاب درسی را مطابق به هدایت انجام دهند.

- معلم از کار و فعالیت شاگردان مراقبت کند. بعد از انجام دادن فعالیت نمایندهٔ یک یا دو گروه، فعالیت انجام دادهٔ خود را روی تخته توضیح دهند. در صورت اشتباه کدام گروه، اشتباه توسط نمایندهٔ گروه دیگر اصلاح شود.

- معلم محترم یک شاگرد داوطلب را بخواهد که شکل مربوط قضیهٔ همین فعالیت را روی تخته رسم کند و دیگر شاگردان در کتابچه‌های خود رسم نمایند، جهت صحیح بودن شاگردان شکل‌های رسم کردهٔ خود را با شکل روی تخته مقایسه کنند.

- معلم با استفاده از شکل، مفهوم قضیه را بیان کند و ثبوت آن را با سهم گیری فعال شاگردان انجام دهد؛ سپس یک شاگرد را بخواهد و بگوید که اضلاع موازی و زاویه‌های مساوی را نشانی نماید.

- معلم دو شاگرد داوطلب دیگر را به نوبت بخواهد که نتیجهٔ اول و دوم قضیه را با استفاده از شکل بیان کنند، اگر شاگردان با مشکلات رو به رو میشوند معلم محترم کمک و رهنمایی کند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

- معلم محترم جهت تحکیم درس سؤالهای زیر را از شاگردان بپرسد:

- آیا زاویه‌هایی که به ترتیب اضلاع شان یک به یک موازی و هم جهت باشند همیشه با یکدیگر مساوی اند؟ یک شاگرد را بخواهد تا به رویت رسم طور عملی جواب ارائه کند.
- آیا زاویه‌هایی که به ترتیب اضلاع شان یک به یک موازی و مختلف‌الجهت باشند همیشه با یکدیگر مساوی اند؟

- معلم یک شاگرد را بخواهد که زاویه‌های مذکور را به تخته رسم کرده و اندازه نماید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

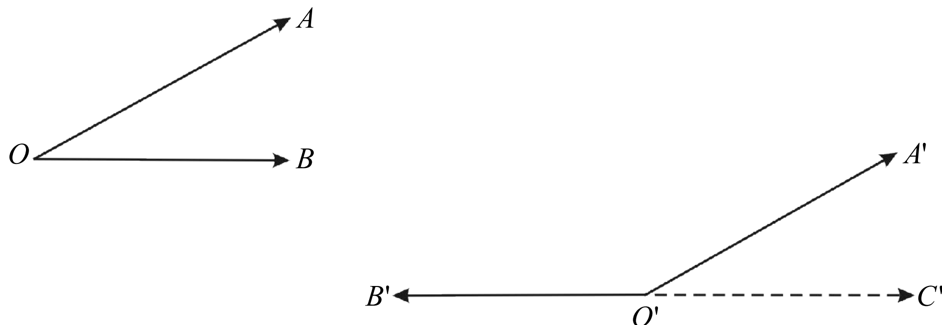
برای اینکه معلم محترم از آموزش و یادگیری شاگردان مطمئن شود آنها را با پرسیدن سؤالهای زیر ارزیابی نماید:

1. کی میتواند دو زاویهٔ مساوی که اضلاع آن یک به یک موازی و همجهت باشند رسم نماید؟
2. کی میتواند دو زاویهٔ مساوی که اضلاع آن یک به یک موازی و مختلف‌الجهت باشند رسم نماید؟

سؤالها توسط شاگردان حل و جواب‌های صحیح دریافت شود.

معلومات اضافی برای معلم:

دو زاویه‌یی که دو ضلع شان موازی، همجهت و دو ضلع دیگر شان موازی و مختلف‌الجهت باشند، ثبوت می‌کنیم که مجموع آن دو زاویه 180° است؛ یعنی: $A\hat{O}B + A'\hat{O'}B' = 180^\circ$



ثبوت: از نقطهٔ O' ضلع $O'C'$ موازی و همجهت با OB رسم می‌کنیم. در اشکال دیده می‌شود که $\overline{OA} // \overline{O'A'}$, $\overline{OB} // \overline{O'B'}$ است.

و همچنان $\overline{OA}$ و $\overline{O'A'}$ موازی و همجهت $\overline{OB}$ و $\overline{O'B'}$ موازی و مختلف‌الجهت اند.

از قضیهٔ قبلی نوشته کرده می‌توانیم: $A\hat{O}B = A'\hat{O'}C'$

از طرف دیگر میدانیم که: $A'\hat{O'}C' + A'\hat{O'}B' = 180^\circ$

اکنون در مساوات فوق قیمت مساوی $A'\hat{O'}C'$ را نوشته می‌نماییم: $A\hat{O}B + A'\hat{O'}B' = 180^\circ$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 106

1– اگر وسعت دو زاویه باهم مساوی باشند و یک ضلع یک زاویه موازی به یک ضلع زاویه دیگر باشد آیا اضلاع دیگر آنها باهم موازی اند. چرا؟

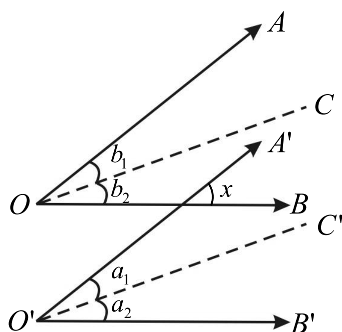
حل: با استفاده از قضیهٔ گذشته(اگر در فضا اضلاع دو زاویه بالترتیب موازی و همجهت باشند زوایای مذکور باهم مساوی می‌باشند.)

ثبوت می‌نماییم که وسعت دو زاویه باهم مساوی اند و هم یک ضلع و یک زاویه با یک ضلع و زاویهٔ دیگر موازی اند؛ پس اضلاع دیگر این زاویه باهم موازی اند.

2 – اگر اضلاع دو زاویه باهم موازی باشند ثابت نمایید که ناصف‌الزوایای آن ها باهم موازی و یا هم عمود اند.

حل: در زاویهٔ $A\hat{O}B$ داریم که: $\hat{b}_1 = \hat{b}_2$

و در زاویهٔ $A'\hat{O}'B'$ داریم که: $\hat{a}_1 = \hat{a}_2$



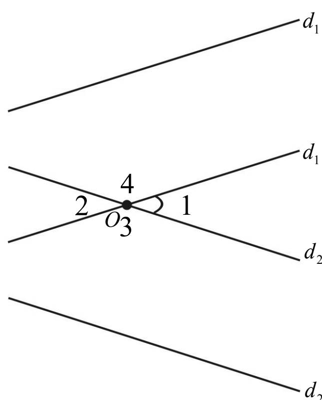
طوریکه $\hat{x} = \hat{a}_1 + \hat{a}_2$ ... است و همچنان $\hat{x} = \hat{b}_1 + \hat{b}_2$ ... است، از طرف دیگر میدانیم که $\hat{a}_1 = \hat{a}_2$ و $\hat{b}_1 = \hat{b}_2$ است؛ بناً:

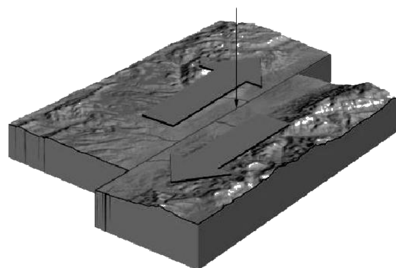
$$2\hat{a}_1 = 2\hat{b}_1 \Rightarrow \hat{a}_1 = \hat{b}_1 \quad , \quad \hat{a}_2 = \hat{b}_2$$

از سؤال میدانیم که $\overline{OB}$ و $\overline{O'B'}$ باهم موازی اند و دیده می‌شود که $\hat{a}_1 = \hat{b}_1$ است؛ چون دو زاویه باهم مساوی باشند؛ پس اضلاع شان باهم موازی بوده، بنابرآن OC و OC' که ناصف‌الزاویا اند باهم موازی می‌باشند.

3– زاویه بین دو مستقیم متنافر d_1 و d_2 را دریافت کنید.

حل: دو خط متنافر d_1 و d_2 را در نظر میگیریم، از یک نقطهٔ اختیاری (O) مستوی به ترتیب موازی‌های Od_1 و Od_2 را با d_1 و d_2 رسم می‌کنیم دیده می‌شود که چهار زاویهٔ تشکیل شده توسط خطوط Od_1 و Od_2 دو به دو با یکدیگر مساوی و یا متمم یکدیگر اندکه در حقیقت زوایای بین دو مستقیم متنافر d_1 و d_2 می‌باشند.





فصل سوم هندسهٔ فضایی

عنوان درس: مستقیم‌های موازی و مستوی‌های موازی در فضا

صفحهٔ کتاب (107)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • حالت‌های خطوط مستقیم‌های موازی و مستوی‌های موازی را در فضا بدانند. • با فصل مشترک مستوی‌های متقاطع خط مستقیم و موازی را رسم کنند. • از کسب دانش و مهارت فوق در زنده‌گی روزمره استفاده کرده و احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	کار گروهی و انفرادی، سؤال و جواب
مواد ممد درسی	دو ورق کاغذ، خمچه و میز
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی شاگردان را متوجه عنوان و قسمت ورودی کتاب ساخته سؤال کند: • کی گفته می‌تواند چی وقت یک خط مستقیم با یک مستوی موازی گفته می‌شود؟ • کدام دو خط مستقیم با یکدیگر موازی گفته می‌شوند؟ • آیا دو مستوی در فضا با یکدیگر موازی شده می‌توانند؟ - معلم به شاگردان وقت بدهد تا جواب را دریافت کنند، در غیر آن به صورت مختصر معلومات داده به اجرای فعالیت و جریان درس جدید آغاز نماید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 107 کتاب درسی را بعد از بحث و مذاکره انجام دهند.

- معلم بعد از انجام فعالیت نمایندهٔ دو گروه را به نوبت بخواهد تا فعالیت انجام دادهٔ خود را به دیگران تشریح نمایند، در صورت اشتباه معلم کمک و رهنمایی کند.

- معلم طوری عملی چنین کارکند: یک شاگرد داوطلب را پیش روی صنف بخواهد دو خمچه را به حیث خطوط مستقیم در نظر بگیرد و سطح میز را به حیث مستوی فرض کند، به شاگرد بگوید تا یک خمچه را به روی میز بگذارد و خمچهٔ دیگر را در فضاطوریکه با خمچهٔ روی میز موازی شود؛ سپس از شاگردان بپرسد:

• آیا این خمچه تنها با خمچهٔ سطح میز موازی است و یا با سطح میز هم موازی است؟

ممکن شاگردان جواب گویند، در غیر آن شکل را روی تخته رسم و مفهوم قضیه را برای شان بیان کند و ثبوت آن

را با سهم فعال شاگردان انجام دهد، به همین قسم معلم شاگرد دوم داوطلب را پیش روی صنف بخواهد یک خمچه و دو ورق کاغذ را به آن بدهد تا هر دو ورق کاغذ را پهلوی هم طوری قرار دهد که از تقاطع آنها یک فصل مشترک به وجود بیاید و خمچه را در فضا طوری بگیرد که با فصل مشترک حالت موازی را اختیار نماید و بپرسد: این خمچه تنها با فصل مشترک موازی است و یا با مستوی‌ها هم موازی است؟ اگر شاگردان جواب گفته توانستند خوب، در غیر آن معلم بگوید که با مستوی‌های موازی است.

- معلم در پایان این فعالیت مفهوم قضیهٔ مربوط را بیان و شکل آن روی تخته رسم کند با سهم گیری فعال شاگردان آن را ثبوت نماید.

- معلم قضیهٔ آخری صفحهٔ 108 کتاب را به شیوهٔ سؤال و جواب(سهم فعال شاگردان) با استفاده از شکل، روی تخته ثبوت کند و مفهوم آن را از شاگردان بپرسد.

تحکیم درس: (7) دقیقه

- معلم جهت تحکیم بهتر درس، چند شاگرد را به نوبت بخواهد، مفهوم و بیان هر قضیه را برای شان بدهد که با استفاده از بیان قضیه، شکل را روی تخته رسم کنند در صورت مشکلات کمک و رهنمایی نماید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه معلم محترم مطمئن شود که آموزش صورت گرفته است یا خیر؟ به ارتباط درس چنین سؤال نماید:

1. هرگاه یک خط مستقیم(Δ) با یک مستوی موازی باشد، آیا خط مستقیم(Δ) با تمام آن خطوط که در مستوی واقع اند موازی است؟(جواب: بلی)
2. هرگاه یک خط مستقیم(Δ) با دو مستوی موازی باشد، آیا خط مستقیم(Δ) با فصل مشترک مستوی‌های مذکور هم موازی است؟(جواب: بلی)

کوشش شود که جواب‌ها از شاگردان به دست آورده شود.

جواب به سؤال های تمرین

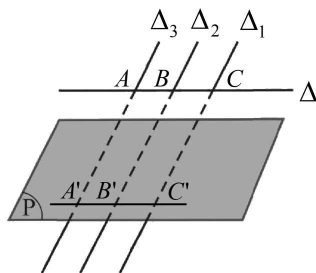
1 – اگر خطوط مستقیم d_1 و d_2 باهم موازی باشند چند مستوی موازی را با آنها رسم نموده می توانیم؟

حل: هرگاه دو خط مستقیم با هم موازی باشند لایتناهی مستوی موازی با آنها رسم شده می‌تواند.

d_1 ————————————

d_2 ————————————

2 – هرگـاه خطـوط مـوازی Δ_1 , Δ_2 و Δ_3 توسـط مسـتوی p وخط Δ که با مستوی p موازی است قطع گردنـد. ثبـوت کنیـد که قطعات قطع شده متقابل باهم مساوی اند یا خیر؟



حل: هرگاه خطوط موازی Δ_1 , Δ_2 و Δ_3 خـط مسـتقیم Δ را در نقـاط B, A و C قطـع کنـد، مسـتوی P خطـوط متذکره را در نقاط B', A' و C' قطع می‌کند؛ پس خطوط AB و $A'B'$ باهم موازی اند، طوری‌که خط مستقیم Δ با مستوی P موازی است؛ پس شکل $ABA'B'$ یک متوازی‌الاضلاع بوده؛ بنا بر آن $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ است.
به همین قسم خطوط $\overline{BC}$ و $\overline{B'C'}$ با هم موازی بوده که شکل $BB'CC'$ نیز یک متوازی‌الاضلاع می‌باشـد در نتیجـه $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ است.



فصل سوم هندسهٔ فضایی

عنوان درس: خطوط مستقیم و مستوی‌های متعامد در فضا

صفحهٔ کتاب (109)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • به مفوم خطوط مستقیم و مستوی‌های متعامد در فضا بفهمند. • مستقیم‌ها و مستوی‌های متعامد بر یکدیگر را در فضا رسم نمایند. • در وقت ضرورت از مستقیم‌ها و مستوی‌های متعامد استفاده نمایند.
روش های تدریس	کار گروهی و انفرادی، سؤال و جواب
مواد ممد درسی	چارت، مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی تدریس، شاگردان را متوجه به عنوان کتاب درسی و قسمت ورودی ساخته و بپرسد: • هرگاه خط مستقیم Δ در نقطهٔ O به مستوی P عمود باشد، آیا تمام خطوطی که از نقطهٔ O مستوی میگذرد بر مستقیم Δ عمود اند؟ هرگاه شاگردان جواب گفتند خوب، در غیر آن معلم محترم کوشش کند که به صورت مختصر جواب را چنین ارائه کند: بلی تمام آن مستقیم‌هایی که از نقطهٔ O مستوی P میگذرند بر مستقیم Δ عمود اند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 109 کتاب درسی را بعد از بحث و مذاکره بین هم انجام دهند و شکل آن را تکمیل نمایند؛ سپس نمایندهٔ یک یا دو گروه طریقهٔ رسم کردن شکل را به دیگران تشریح و توضیح نمایند.

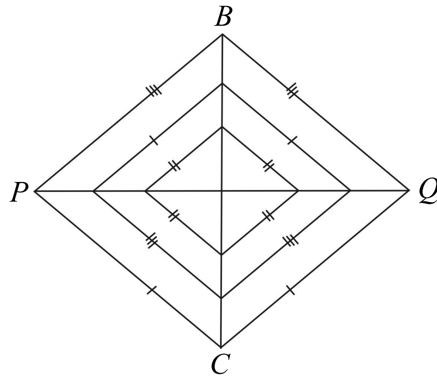
در صورت اشتباه کدام گروه کوشش شود که اشتباه در فضای صمیمیت توسط گروه دیگری اصلاح شود.

در پایان معلم محترم مفهوم همین قضیه را بیان وشکل را مرحله به مرحله به صورت مکمل روی تخته رسم نماید و با استفاده از شکل ثبوت را به طور سؤال وجواب انجام دهد.

- معلم محترم کوشش کند خطوطی که به یکدیگر عمود و یا یک به دیگر مساوی اند و همچنان شکل هایی که بر یکدیگر منطبق اند توسط شاگردان دریافت کند در صورتی که شاگردان مشکلات داشته باشند کمک نماید، طوری‌که هر کدام را به صورت جداگانه پیدا و نشان دهد.

تحکیم درس: (7) دقیقه

- معلم جهت تحکیم بهتر درس فعالیت صفحهٔ 110 کتاب درسی را به شاگردان بدهد که هر کدام به صورت انفرادی در کتابچه های خود انجام دهد.



- معلم سه شاگرد را به نوبت بخواهد که هر کدام یک یک قسمت از فعالیت را تشریح کنند هرگاه شاگردان مشکل داشته باشند معلم کمک و رهنمایی کند شکل، مقابل را روی تخته رسم و اندازه‌های مساوی را نشان دهد.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه معلم محترم مطمئن شود که آیا آموزش صورت گرفته است یا خیر؟ از شاگردان سؤالهای زیر را بپرسد:

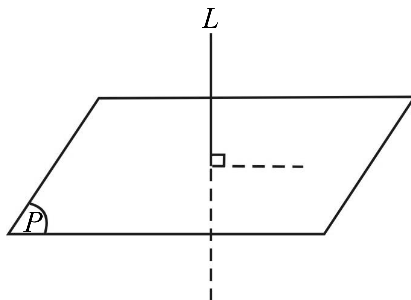
1. هرگاه خط مستقیم Δ در نقطهٔ O به مستوی P عمود باشد، آیا می‌تواند تمام آن مستقیم‌هایی که از نقطهٔ O مستوی میگذرد بر مستقیم Δ عمود باشند؟
2. هرگاه دو خط مستقیم بر خط مستقیم Δ که از نقطهٔ O مستوی میگذرد عمود باشند، آیا مستقیم Δ بر آن مستوی که از تقاطع همین دو مستقیم تشکیل می‌شود هم عمود است؟

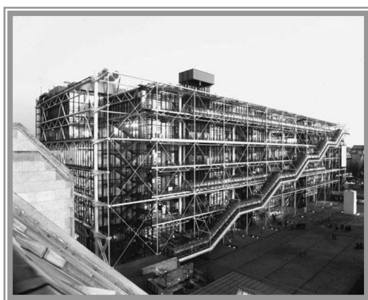
کوشش شود که جوابها از شاگردان به دست بیاید در صورت مشکلات معلم کمک و رهنمایی کند.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 110

اگر خط مستقیم L به روی مستوی P عمود باشد آیا تمام مستوی هایی که خط L در آن واقع است به روی مستوی P عمود می‌باشند؟

حل: بلی! هرگاه خط L به روی مستوی P عمود باشد، در آن صورت تمام آن مستوی‌هایی که خط L در آن واقع اند بر مستوی P عمود می‌باشند.





فصل سوم هندسهٔ فضایی

عنوان درس: مستوی‌های موازی در فضا

صفحهٔ کتاب (111)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • به مفهوم دو مستوی موازی در فضا بفهمند. • به تشکیل دو مستوی موازی در فضا بدانند. • دو مستوی موازی را در فضا رسم نمایند. • در وقت ضرورت از مستوی‌های موازی استفاده نمایند.
روش های تدریس	کار گروهی و انفرادی، سؤال و جواب
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، شاگردان را متوجه به عنوان کتاب درسی و قسمت ورودی ساخته و بپرسد: • شکل مقابل(ورودی) کتاب چند طبقه دارد؟ • کلکین‌های طبقه فوقانی با کلکین‌های طبقه پایینی کدام حالت را دارند؟ - معلم کوشش نماید که جوابها را از شاگردان دریافت کند، در غیر آن حالت‌های موازی بودن آن را تشریح و توضیح دهد.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 111 کتاب درسی را بعد از بحث و مذاکره بین هم انجام دهند. بعد از انجام دادن فعالیت نماینده‌های یک یا دو گروه را بخواهد تا فعالیت انجام دادهٔ گروه خود را به دیگران تشریح کنند. در صورت اشتباه کدام گروه، گروه داوطلب آن را اصلاح نماید، طوری‌که قناعت همه‌گی حاصل شود؛ سپس توسط یک شاگرد دو شکل صفحهٔ 112 را که $d_1 // \Delta_1$ و $d_2 // \Delta_2$ است روی تخته رسم کند، در صورت مشکلات معلم کمک و رهنمایی نماید.

به همین قسم یک شاگرد داوطلب را بخواهد که با استفاده از شرایط، دو مستوی موازی را روی تخته رسم نماید و دیگر شاگردان در کتابچه های خود رسم نموده باهم مقایسه نمایند. در ختم با استفاده از شکل‌ها مفهوم قضیه و نتیجه را بیان کرده و قضیه را با سهم فعال شاگردان به صورت سؤال و جواب ثبوت نماید تا شاگردان مفهوم قضیه را به صورت مکمل بفهمند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

- معلم جهت تحکیم بهتر درس سؤالهای زیر را از شاگردان بپرسد:

- کی می‌تواند چنان چهار خط مستقیم را رسم نماید که دو به دو متقاطع و همه دو به دو با یکدیگر موازی باشند؟
- آیا از هر جوره خطوط متقاطع فوق یک مستوی میگذرد؟

- معلم کوشش کند که جوابها را به شکل انفرادی از شاگردان به دست بیاورد، اگر کدام شاگرد اشتباه می کند، اشتباه توسط یک شاگرد داوطلب اصلاح شود.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه معلم محترم مطمئن شود که آیا آموزش صورت گرفته است یا خیر؟ از شاگردان سؤالهای زیر را بپرسد:

1. آیا امکان ایجاد دو مستوی موازی در فضا شده می‌تواند؟
2. کی دو مستوی موازی را رسم کرده می‌تواند؟
3. مستوی‌های موازی چند نقطهٔ مشترک دارند؟

- معلم می‌تواند به همین قسم سؤالهای دیگر را مطرح نماید و جوابها را از شاگردان دریافت کند تا ارزیابی درست صورت بگیرد.

حل تمرینات عمومی فصل سوم(4 ساعت درسی)

برای هر سؤال چهار جواب داده شده است جواب درست را دریافت و دور آن را حلقه نمایید.

1 – مستوی P و نقاط A و B مفروض هستند، اگر فاصلهٔ نقاط A و B از مستوی P مساوی باشد آنگاه مستوی P همواره:

a – با خط AB موازی است. b– از وسط خط AB می گذرد.

c – ناصف عمودی خط AB است. (d)– موازی به قطعه خط AB است یا از وسط خط AB میگذرد.

2 – اگر خط Δ بالای مستوی p عمود باشد آنگاه:

(a)– خط Δ به تمام خطوط مستوی p عمود است.

b– خط Δ فقط به دو خط مستوی p عمود است.

c– خط Δ با بی نهایت خطوط از مستوی p موازی است.

d– خط Δ فقط با یکی از خطوط مستوی p موازی است.

3 – از کدام یک از اجزای زیر به صورت دقیق یک مستوی عبور نمی کند:

(a)– از سه نقطه واقع به یک خط مستقیم b– دو خط متقاطع

c– یک خط و یک نقطهٔ خارج از آن d– چهار نقطهٔ متمایز.

4- کدام یک از جواب های زیر همیشه درست نیست:

(a)– اگر خط مستقیم Δ با مستوی p موازی باشد.

b– اگر دو خط Δ و Δ' با خط d موازی باشند، آن گاه Δ و Δ' موازی هستند.

c– اگر دو خط Δ و Δ' موازی باشند و مستوی خط Δ را قطع کند خط Δ' را نیز قطع خواهد کرد.

d– اگر دو مستوی متمایز یک نقطهٔ مشترک داشته باشند، آن گاه دریک خط مستقیم مشترک خواهند بود.

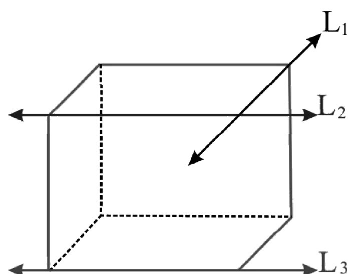
5 – خط Δ مستوی p را قطع می کند؛ ولی بر مستوی p عمود نیست این خط به چند خط از مستوی p عمود است.

(a) 0 b) 1 c) 2 d) بی شمار

سؤالات زیر را حل کنید.

1 – اگر دو خط مستقیم با یک مستوی موازی باشند آیا خطوط مذکور باهم عمود شده می توانند؟

حل: نه خیر، خطوط مذکور باهم عمود شده نمی‌توانند.



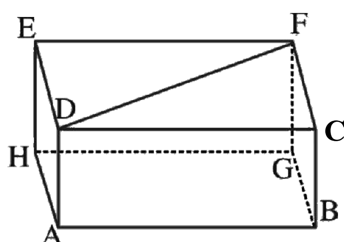
2 – در شکل مقابل موقعیت خطوط L_1 , L_2 و L_3 را نظر به یکدیگر توضیح نمایید.

آیا کدام جوره از خطوط باهم متقاطع، کدام جوره از خطوط آنها باهم موازی و کدام ها متنافر می باشند؟

حل: خطوط L_1 و L_2 در یک سطح واقع بوده؛ مگر خط L_3 در تحت خطوط L_1 و L_2 موقعیت داشته، خطوط L_1 و L_2 باهم متقاطع اند، خطوط L_2 و L_3 باهم موازی اند؛ ولی خطوط L_1 و L_3 متنافر اند.

3 – اگر مستوی های P_1 و P_2 بر روی مستوی p عمود باشند آیا مستوی های P_1 و P_2 باهم موازی اند ؟

حل: بلی هرگاه مستوی‌های P_1 و P_2 بر مستوی P عمود باشند در این صورت نظر به قضیه‌های قبلی گفته می‌توانیم که مستوی‌های P_1 و P_2 باهم موازی اند.



4 – در شکل مقابل هر چهار ضلعی یک مستطیل است.

a– دو مستوی را نام ببرید که بالای خط AD عمود باشند و بگویید چرا عمود اند؟

b– سه قطعه خط را نام بگیرید که بالای مستوی ABCD عمود باشند.

c– آیا زاویهٔ $E\hat{D}F$ قایمه است؟

d– آیا زاویهٔ $D\hat{F}C$ قایمه است؟

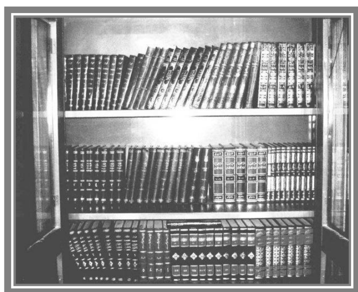
حل:

a– دیده می‌شود که $ABGH$ و $DCFE$ دو سطح مکعب مستطیل بوده که با یکدیگر موازی اند. به اساس قضیهٔ (هرگاه دومستوی بر یک خط عمود باشند این دو مستوی باهم موازی اند) گفته میتوانیم؛ چون هر دو مستوی باهم موازی اند، از این سبب هر دو مستوی به خط $\overline{AD}$ عمود می‌باشند.

b– دیده میشود که خط $\overline{AH}$, $\overline{ED}$ و $\overline{FC}$ بر مستوی $ABCD$ عمود هستند.

c– در شکل مکعب مستطیل دیده میشود که زاویهٔ $E\hat{D}F$ کوچکتر از زاویهٔ $E\hat{D}C$ است و $E\hat{D}C$ یک زاویهٔ قایمه است؛ پس زاویهٔ $E\hat{D}F$ قایمه نمی باشد.

d– به همین ترتیب دیده میشود که زاویهٔ $D\hat{F}C$ کوچکتر از زاویهٔ $E\hat{F}C$ بوده، چون زاویهٔ $E\hat{F}C$ قایمه یعنی 90° است؛ پس زاویهٔ $D\hat{F}C$ قایمه نمیباشد.



فصل چهارم ترادف ها

عنوان درس:ترادف ها(Sequences)

صفحۀ کتاب (119)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم ترادف، ترادف متزاید و ترادف متناقص را بفهمند. • ترادفها را بسازند و حد a_n یک ترادف را پیدا کنند. • از ساختن ترادفها و دریافت حد n -ام شان احساس خوشی نموده و به خود اعتماد پیدا کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم مُحترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، توجه شاگردان را به سؤال‌های ورودی معطوف بدارد و بپرسد: • کی میتواند بگوید فرق بین اعداد قبلی و بعدی یک عدد طبیعی، چند است؟ • کی میتواند به ترتیب 8 عدد را از خورد به طرف بزرگ (طور صعودی) بنویسد؟ • کی میتواند 12 عدد را به ترتیب از عدد بزرگ به طرف عدد خورد(طور نزولی) بنویسد؟ همچنان معلم در مورد شکل ورودی از شاگردان معلومات بخواهد و کوشش شود که از شاگردان جواب گرفته شود.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم مُحترم از یک شاگرد داوطلب بخواهد تا به ترتیب عددهای جفت را تا 20 روی تخته بنویسد؛ سپس بپرسد که فرق بین هر دو عدد متعاقب چند است؟ اگر شاگرد جواب داد خوب، در غیر آن معلم به ارائۀ جواب بپردازد.

به همین قسم معلم یک شاگرد دیگر را بخواهد تا اعداد طاق بالاتر از 20 را روی تخته بنویسد و بپرسد که فرق بین هر دو عدد مسلسل(پیهم) چند است؟

شاید شاگردان بتوانند جواب بگویند، در صورت عدم ارائۀ جواب معلم مُحترم برایشان بگوید که دستۀ اول اعداد مرتبه(ترتیب شده) را ترادف اعداد جفت و دستۀ دوم اعداد مُرتبه را ترادف اعداد طاق می‌نامند. ترادف اعداد جفت را از $2n$ و ترادف عدد طاق را از افادۀ $2n-1$ می‌توان به دست آورد.

در اخیر معلم تعریف ترادف، ناحیۀ تعریف(اعداد طبیعی)، ناحیۀ قیمت(اعداد حقیقی) را برای شاگردان بیان کند و همچنان $a_1, a_2, a_3 \; ... \; a_n$ را که به نام ترادف یاد می‌شود روی تخته بنویسد.

- معلم خاطر نشان سازد که ترادف باید شکل مرتب و منظم را داشته باشند، نه شکل غیر مرتب را.
- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 119 کتاب درسی را در مشورت باهم انجام دهند و شکل انکشاف یافتهٔ هر یک از ترادف را بنویسند. بعد در مورد ترادفهای متزاید و متناقص سؤال کند تا هر گروه به نوبت جواب بگویند، در صورتی که شاگردان مشکل داشته باشند معلم کمک و راهنمایی نماید؛ سپس دو شاگرد را به نوبت بخواهد یک شاگرد اولی ترادف $a_n = n^2$ و شاگرد دومی ترادف $b_n = \frac{n}{3}$ را پیدا کند($n = 1, 2, 3, \ldots$) در ترادفهای حاصله، شاگرد سومی ترادفهای متزاید و متناقص را نشان دهد.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس مثال دوم صفحهٔ 120 کتاب درسی را توسط یک شاگرد داوطلب به روی تختهٔ صنف حل کند و شاگردان دیگر در کتابچه‌های شان بدون استفاده از کتاب عین مثال را حل کنند. در اخیر، حل‌های خویش را با حل روی تخته مقایسه نمایند. توجه شود تا شاگردان ترادف را به شکل منظم و مرتب بنویسند، در غیر آن معلم محترم ایشان را رهنمایی کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم محترم برای اطمینان از آموزش شاگردان سؤالهای زیر را مطرح نماید:

1. ناحیهٔ تعریف ترادف کدام عددها شده میتوانند؟
2. ناحیهٔ قیمت‌های ترادف کدام عددها شده میتوانند؟
3. آیا اعداد نامرتب و غیر منظم یک ترادف را ساخته می‌توانند؟
4. کی میتواند یک ترادف معین و یک ترادف غیر معین را روی تخته بنویسد؟

کوشش شود که جواب‌ها به نوبت از شاگردان دریافت شود، در صورت مشکل معلم رهنمایی کند.

معلوما اضافی برای معلم

- معلم محترم در ردیفها، ترتیب اعداد را مد نظر بگیرد؛ مانند:

1) $1 , 3 , 5 , 9 , \ldots$

2) $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \frac{1}{5} , \ldots$

3) $1^2 , 2^2 , 3^2 , 4^2 , 5^2 , \ldots$

در ردیف‌ها نقاط(...) نشاد دهندهٔ اینست که اعداد ادامه دارند.

به شکل عمومی ترتیب اعداد $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ تحت یک قاعدهٔ خاص به نام ردیف یا *Sequence* یاد می‌شود.
$a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ عددها اند که هر یک شان یک حد را ارائه می‌دارد، طوری که تعداد اعداد طبیعی بی‌نهایت اند؛ پس حدهای این ردیفها نیز بی‌نهایت می‌باشند و نمی‌توان حد آخری آن را معین ساخت.

طور معمول یک ردیف به واسطهٔ حد n−ام؛ یعنی a_n تعریف می‌شود که حدهای سلسله طور زیر نشان داده می‌شوند، در حالی‌که $n>0$ باشد:

$$0,1,0,1,0,1\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{1+(-1)^n}{2}$$

$$0,2,0,2,0,2\ ,\ \ldots\ ,\ [1+(-1)^n]$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 120

1) در ترادف‌های زیر حد n−ام را پیدا کنید.

$$\left.\begin{array}{l} 1,3,5,7,\ \ldots \\ \frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9}\ ,\ \ldots \end{array}\right\}$$

حل:

$$1,3,5,7\ ,\ \ldots\ ,\ 2n-1 \quad , \quad n=1,2,3$$

$$1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{1}{2n-1} \quad , \quad n=1,2,\ \ldots$$

2) اگر یک ترادف به شکل $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ داده شده باشد 6 حد اول پی در پی آن‌را بنویسید.

حل:

$$a_1=\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\frac{(-1)^{1+1}}{1}=\frac{(-1)^2}{1}=\frac{1}{1}=1$$

$$a_2=\frac{(-1)^{2+1}}{2}=\frac{(-1)^3}{1}=-\frac{1}{2}$$

$$a_3=\frac{(-1)^{3+1}}{3}=\frac{(-1)^4}{3}=\frac{1}{3}$$

$$a_4=\frac{(-1)^{4+1}}{4}=\frac{(-1)^5}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$a_5=\frac{(-1)^{5+1}}{5}=\frac{(-1)^6}{5}=\frac{1}{5}$$

$$a_6=\frac{(-1)^{6+1}}{6}=\frac{(-1)^7}{6}=-\frac{1}{6}$$

$$1\,,-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{3}\,,-\frac{1}{4}\,,\frac{1}{5}\,,-\frac{1}{6}\,,\ldots,\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

فصل چهارم ترادف ها



عنوان درس: ترادف حسابی(*Arithmetic Sequence*)

صفحهٔ کتاب (121)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • به مفهوم ترادف حسابی بفهمند. • ترادف های حسابی را بسازند و هر حد آن را پیدا نمایند. • به ارتباط ترادف حسابی سؤال کنند. • با کسب دانش و مهارت فوق اعتماد به نفس پیدا کنند و احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت(چارت شکل ورودی)
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم مُحترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس، توجه شاگردان را به چارت قسمت سؤال ورودی جلب کند و بپرسد: • رو به روی تان چند شکل را می بینید؟ • به هر شکل چند حلقه دیده می‌شود؟ • فرق بین حلقه‌های هر دو شکل متعاقب چند است؟ • آیا فرق‌ها مساوی اند یا خیر؟ شاگردان حلقه‌های هر شکل را بشمارند و فرق تعداد حلقه‌های هر شکل را بگویند در صورت مشکلارت معلم کمک کند و بگوید که فرق‌ها یک عدد ثابت و عبارت از عدد 3 می‌باشد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 121 کتاب درسی را بعد از جروبحث انجام دهند.

- معلم در جریان فعالیت از کار گروه‌ها نظارت به عمل آورد، در صورت ضرورت مشکلات را حل کند. در اخیر نمایندهٔ یک گروه یا دو گروه فعالیت ، گروه خود را به دیگران توضیح دهد، در صورت اشتباه، معلم یا نمایندهٔ گروه دیگر به رفع اشتباه بپردازد؛ سپس معلم تعریف ترادف را بیان کند و همچنان فرق مشترک حدود را با ترادفهای متزاید و متناقص با در نظر داشت اشارهٔ d یعنی $d > 0$ و $d < 0$ با استفاده از مثالهای کتاب درسی توضیح کند.

- معلم از یک شاگرد داوطلب بخواهد تا مثال اول صفحهٔ 122 کتاب درسی را روی تخته حل کند، همزمان عین

مثال را شاگردان دیگر در کتابچه‌های شان(بدون استفاده از کتاب) حل کنند، در صورت اشتباه، معلم کمک و رهنمایی نماید. در اخیر شاگردان حل‌های خویش را با حل روی تخته مقایسه نمایند در صورت داشتن اشتباه، حل‌های خود را اصلاح و خود را به آن بفهمانند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس مثال 2 صفحهٔ 122 کتاب درسی را به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف کار کند.

معلومات اضافی برای معلم

معلم محترم، فرق هر دو حد ردیفها یک عدد ثابت و شناخته شده می‌باشد. ردیف $a_1, a_2, a_3 \ \dots \ a_n$ که یک ردیف حسابی(*Arithmetic sequence*) یا تصاعد حسابی(*Arithmetic progression*) یاد می‌شود که هر حد آن نظر به حد قبلی آن یک فرق ثابت دارد و به نام تفاضل مشترک یاد می‌شود و به d نشاده داده می‌شود، می‌تواند d یک عدد مثبت، منفی و یا صفر باشد. همین قسم اگر سؤال شود که با در نظر داشت تعریف تصاعد حسابی باید در یک تصاعد حسابی رابطهٔ $b-a=c-b$ موجود باشد.

از رابطهٔ فوق حد وسطی یک تصاعد حسابی طور زیر به دست می‌آید که به تمام ردیف‌های حسابی مطابقت دارد:

$$b-a=c-b \ \Rightarrow \ b+b=c+a$$

$$2b=c+a \quad \Rightarrow \ b=\frac{c+a}{2}$$

b حد وسطی بین دو حد یک ردیف می‌باشد که در بین a و b قرار دارد. خاصیت فوق به تمام ردیف‌های حسابی صدق می‌کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای اینکه معلم اطمینان پیدا کند که آیا شاگردان درس را فهمیده اند یا خیر؟ با سؤال‌های زیر شاگردان را ارزیابی کند:

1. اگر $d<0$، باشد تراد متزاید است یا متناقص؟
2. اگر $d>0$، باشد گفته می‌توانید که ترادف متزاید است یا متناقص؟
3. هرگاه در یک ردیف فرق هر دو حد پی در پی عدد ثابت نباشد؛ یعنی فرق داشته باشند آیا ترادف حسابی شده می‌تواند؟
4. کی تعریف ترادف حسابی را گفته می‌تواند؟

کوشش شود که شاگردان جواب دهند، در غیر آن معلم محترم در مورد توضیح بدهد.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 128

2- آیا $\frac{5}{4}, 1, \frac{3}{4}$ تشکیل ترادف حسابی را می‌دهند؟ درصورت صحت بودن سؤال فرق مشترک آن را به دست آورید.

حل: برای فهمیدن سؤال که آیا ترادف فوق یک ترادف حسابی است یانه؟ بایدفرق بین هر دو حد پی در پی یک عددثابت باشد.

$$\frac{5}{4}-1=\frac{5-4}{4}=\frac{1}{4}$$
$$1-\frac{3}{4}=\frac{4-3}{4}=\frac{1}{4}$$

طوری‌که دیده می‌شود فرق بین هر دو حد یکعدد ثابت می‌باشد؛ بنابر آن ترادف داده شده یک ترادف حسابی می‌باشد.

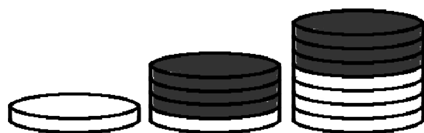
4- اگر $a_1=-\frac{1}{2}$, $a_{10}=\frac{84}{2}$ باشد قیمت d را در یافت کنید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=-\frac{1}{2} \\ n=10 \\ a_{10}=\frac{84}{2}=42 \\ d=? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a_n=a_1+(n-1)d \\ a_n-a_1=(n-1)d \\ d=\frac{a_n-a_1}{n-1}=\frac{42-(-\frac{1}{2})}{10-1}=\frac{42+\frac{1}{2}}{9}=\frac{\frac{84+1}{2}}{2}=\frac{\frac{85}{2}}{9}=\frac{85}{18}=4.7 \end{array}$$

نوت: سؤالهای شماره 1 و 3 به ارتباط موضوع در آینده حل می‌شوند.

فصل چهارم ترادف ها



عنوان درس: پیدا کردن حد n -ام یک ترادف حسابی

صفحهٔ کتاب (123)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • در رابطهٔ $a_n = a_1 + (n-1)d$ و n, a_1, a_n و d را بشناسند. • از رابطهٔ فوق جزء نامعلوم(خواسته شده) را دریافت نمایند. • در صورت ضرورت از فارمول فوق کار بگیرند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	معلم مُحترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی تدریس، توجه شاگردان را به سؤال‌ها ورودی معطوف بدارد و بپرسد: • اگر حد اول یک ترادف حسابی a_1، فرق مشترک d داده شده باشند کی میتواند حد n -ام آن را پیدا کند؟ • کی میتواند در ترادف ... $a_n = 2,6\ ,10$ حد اول و فرق مشترک حدود را دریافت کند؟ ممکن شاگردان جواب بگویند، در غیر آن معلم جواب بگوید و به تدریس درس جدید بپردازد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم مُحترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند و ترادف حسابی ... 5,7,9,11,13 را روی تخته بنویسد و هدایت دهد تا هر گروه بعد از بحث و مشورت باهم، حد اول و فرق مشترک حدود را دریافت و بعد با استفاده از یک رابطه حدهای دوم، سوم، چهارم، پنجم، ششم و ... را نشان دهند هر گروه سعی کند که از روی رابطهٔ دریافت شده، رابطهٔ عمومی a_n را نیز به دست بیاورد، در ختم نمایندهٔ یک یا دو گروه کار گروهی، گروه خویش را روی تخته به دیگران توضیح دهد در صورت اشتباه، معلم رهنمایی کند. نسبت مهم بودن موضوع معلم برای دریافت حد n -ام به شکل مکمل قدم به قدم کار کند و در نتیجه فارمول عمومی $a_n = a + (n-1)d$ را ثبوت و به دست بیاورد، تا شاگردان بتوانند در رابطهٔ مذکور n, a_1, d و a_n را بشناسند. بعد معلم دو شاگرد را به نوبت بخواهد تا مثالهای اول و دوم را بالترتیب روی تخته حل کنند. شاگردان دیگر نیز عین مثالها را در کتابچه‌های خود بدون استفاده از کتاب حل نمایند. اگر اشتباهی در کار و فعالیت شاگردان موجود باشد، یک شاگرد داوطلب مثالها را حل نماید تا شاگردان اشتباه خویش را رفع نمایند در صورت مشکل معلم رهنمایی کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس هدایت دهد تا شاگردان فعالیت صفحهٔ 125 کتاب درسی را در کتابچه‌های خود حل کنند.

- معلم از کار و فعالیت شاگردان نظارت کند.

- معلم شاگردان فعال را تشویق و ضعیفان را کمک و رهنمایی کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای اطمینان خویش از آموزش شاگردان با سؤالهای زیر ایشان را ارزیابی کند:

1. بادر نظرداشت رابطهٔ $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، a_1 کدام حد ترادف و a_n کدام حد ترادف را نشان میدهد؟
2. در یک ترادف n چی را نشان می‌دهد؟
3. d در یک ترادف چی را نشان می‌دهد؟

کوشش شود که جواب‌ها از شاگردان گرفته شود.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 128

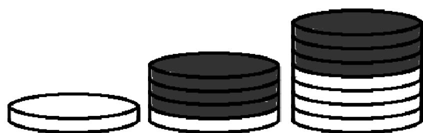
1- حد35ام ترادف مقابل را در یافت کنید. $-2\ ,\ 5\ ,\ 12\ , \ldots$

حل: می‌دانیم که ترادف فوق یک ترادف حسابی است، زیرا فرق مشترک حدود آن 7 می‌باشد، بنابرآن برای دریافت حد n-ام از فورمول زیر کار می گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} a=-2 \\ d=7 \\ n=35 \\ a_{35}=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_n = a+(n-1)d \\ a_{35} = -2+(35-1)\cdot 7 \\ a_{35} = -2+34\cdot 7 \\ a_{35} = -2+228 = 236 \end{array}$$

$$a_{35} = 236$$

فصل چهارم ترادف ها



عنوان درس: حد وسطی ترادف حسابی

صفحۀ کتاب (125)

وقت تدریس(1ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم حد وسطی ترادف حسابی و هارمونیکی را بفهمند. • سؤالهای مربوط حد وسطی ترادف حسابی و هارمونیکی را حل کنند. • با کسب دانش و مهارت فوق مشکلات روزمره را حل و به نفس خود اعتماد پیدا کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	معلم مُحترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی تدریس، به خاطر کسب بهتر دانش شاگردان، توجه شان را به سؤالهای زیر جلب کند: • کی میتواند وسط حسابی اعداد 5 و 7 را پیدا کند؟ • کی میتواند حاصل جمع 7 و 8 را تقسیم 2 نماید؟ • عدد بین اعداد 19 و 17 کدام است؟ کوشش شود تا جواب سؤالها از شاگردان گرفته شود، در غیر آن معلم جواب هر سؤال را به واسطۀ عملیۀ مربوط پیدا کند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند وبگوید؛ هرگاه ترادف حسابی دارای سه حد پی در پی مانند a_{n-1}, a_n و a_{n+1} داشته باشیم، در حالیکه a_{n-1} و a_{a+1} معلوم باشد چطور میتوانیم a_n یعنی حد وسطی را پیدا کنیم؟ شاگردان بدون استفاده از کتاب درسی در مورد سؤال بحث نمایند و فعالیت را انجام دهند. در اخیر نمایندۀ یک گروه، فعالیت گروه خود را به دیگران توضیح کند در صورت اشتباه، معلم رهنمایی کند، طوری که در افادۀ $\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2}$ با گذاشتن قیمت‌های حد وسطی a_n را به دست بیاورد.

معلم دو شاگرد را به نوبت بخواهد تا به ترتیب مثال‌های 1 و 2 را با تطبیق فارمول روی تخته حل کنند. همزمان عین مثالها را شاگردان دیگر در کتابچه‌های خود بدون استفاده از کتاب درسی حل کنند. بعد از پیدا کردن قیمت x ترادف را بنویسند. در ختم شاگردان حل‌های کتابچه‌های خود را با حل روی تخته مقایسه و اشتباهات خویش را تصحیح کنند. به همین قسم یاد داشت صفحۀ 126 کتاب درسی را که یک ترادف حسابی است بدون حد اول،

دو حد دیگر داده شده است به رویت آن فرق مشترک را دریافت نمایند(ثبوت آن وظیفهٔ شاگردان است)، در صورتیکه شاگردان موفق به ثبوت آن نشوند معلم محترم با استفاده از معلومات اضافی آن را ثبوت نماید.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس مثال 1 صفحهٔ 127 کتاب درسی را به شاگردان بسپارد تا بدون استفاده از کتاب به کتابچه‌های خود حل کنند و ترادف را تکمیل نمایند.
- معلم از جریان کار نظارت کند در اخیر یک شاگرد مثال را روی تخته حل کند و شاگردان دیگر حل‌های خویش را با آن مقایسه نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای این‌که از آموزش شاگردان مطمئن شده باشد با سؤالهای زیر ایشان را ارزیابی کند:

1. اگر a_n حد وسطی یک ترادف حسابی باشد، حد قبلی و حد بعدی آن توسط چی نشان داده می‌شود؟
2. آیا حد وسطی یک ترادف حسابی با حاصل جمع دو حد پی در پی آن مساوی شده می‌تواند؟
3. اگر سه حد پی در پی یک ترادف حسابی a_n , a_{n-1} و a_{n+1} را داشته باشیم، حد وسطی ترادف حسابی به واسطهٔ کدام فارمول افاده می‌شود؟

کوشش شود تا سؤالها را شاگردان جواب دهند، در غیر آن خود به توضیح بپردازد.

معلومات اضافی برای معلم

- معلم محترم، هرگاه در یک ترادف حسابی حدهای n−ام و m−ام معلوم باشند و فرق مشترک شان عین چیز باشد، فرق مشترک شان را این طور به دست می‌آوریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \quad \dots \text{ I}$$
$$a_m = a_1 + (m-1)\cdot d \quad \dots \text{ II}$$

از معادلهٔ I معادلهٔ II را تفریق می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a_n - a_m &= a + (n-1)\cdot d - \{a + (m-1)\cdot d\} \\ &= a + (n-1)\cdot d - a - (m-1)\cdot d \\ &= a + nd - d - a - md + d = nd - md = (n-m)d \end{aligned}$$

$$a_n - a_m = (n-m)d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 128

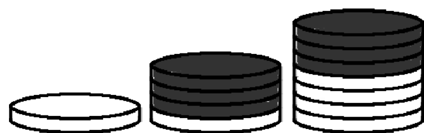
3- اوسط حسابی بین $2\sqrt{2}$, $16\sqrt{2}$ را دریافت کنید.

حل: با استفاده از فارمول عمومی وسط حسابی داریم که:

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} \quad \text{حد وسطی}$$

$$A = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 16\sqrt{2}}{2} = \frac{18\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad A = 9\cdot\sqrt{2}$$

فصل چهارم ترادف ها



عنوان درس: ترادف هارمونیکی
صفحهٔ کتاب (127)
وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم‌های ترادف هارمونیکی و وسط حسابی هارمونیکی را بدانند. • ترادفهای هارمونیکی و عکس آن را تشخیص کنند. • در یک ترادف حسابی با دریافت ترادف هارمونیکی احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	معلم مُحترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی تدریس، توجه شاگردان را به سؤالهای زیر معطوف بدارد: • کی میتواند معکوس عدد 5 را روی تخته بنویسد؟ • کی گفته میتواند که $\frac{1}{25}$ معکوس کدام عدد است؟ • هرگاه a یکعدد حقیقی باشد، کی گفته میتواند که معکوس آن را چطور نوشته میتوانیم؟ کوشش شود تا جواب از شاگردان دریافت شود، در غیر آن معلم کمک نماید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم یک ترادف حسابی را روی تخته بنویسد و یک شاگرد داوطلب را بخواهد تا معکوس هر عدد ترادف مذکور را طور مسلسل که یک ترادف را بسازد بنویسد. هرگاه شاگرد نامبرده ترادف را نوشت خوب؛ در غیر آن معلم آن را به شکل مکمل بنویسد و به اساس آن ترادف هارمونیکی را تعریف کند.

همین قسم گفته شود، اگر a_n یک ترادف حسابی باشد، معکوس آن $\frac{1}{a_n}$ یک ترادف هارمونیکی می‌باشد همچنان معلم سه شاگرد داوطلب را به نوبت بخواهد تا مثالهای اول، دوم و سوم را روی تخته حل کنند، همزمان شاگردان دیگر بدون استفاده از کتاب مثالها را در کتابچه‌های خویش حل نمایند و حل‌های خویش را با حل‌های روی تخته مقایسه و در صورت داشتن اشتباه، اشتباه خود را تصحیح نمایند، معلم به مشکل شاگردان رسیده‌گی کند.

معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند و هدایت دهد فارمول اوسط حسابی سه حد پی در پی را مانند a_{n+1}, a_n, a_{n-1} در حالیکه $n = 2, 3, 4, \ldots$ باشد پیدا کنند. شاگردان در گروه‌های خود بحث کنند وفعالیت را انجام دهند.

در ختم فعالیت نمایندهٔ یک یا دو گروه فعالیت گروه خود را روی تخته به دیگران توضیح دهد در صورت داشتن مشکل معلم کمک و رهنمایی کند، در اخیر معلم به اساس معلومات قبلی فارمول عمومی $a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$ را توضیح و تشریح نموده و به دست بیاورد و مثال داده شده را روی تخته حل کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم هر چه بیشتر درس در مورد ترادف هارمونیکی و وسط حسابی هارمونیکی سؤالهای زیر را به شاگردان بدهد، تا شاگردان در کتابچه‌های خویش حل کنند.

- ترادف حسابی و هارمونیکی ... ,4,7,10,13,14 را بنویسند.
- وسط حسابی هارمونیکی اعداد 4 و 10 را پیدا نمایند، در صورت مشکل معلم کمک نماید.

- معلم از جریان فعالیت شاگردان نظارت کند در ختم از یک شاگرد داوطلب بخواهد تا فعالیت خویش را به روی تخته حل و توضیح دهد و دیگر شاگردان حل‌های خود را با آن مقایسه نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای اینکه بداند آیا شاگردان درس را یاد گرفته اند یا خیر؟ با پرسیدن سؤالهای زیر آنها را ارزیابی کند:

1. کی ترادف هارمونیکی را تعریف می‌کند؟
2. هرگاه در یک ترادف هارمونیکی $a_1 = \frac{1}{2}$ و $d = -2$ باشد، تردف هارمونیکی آن را پیدا کنید.
3. آیا هر ترادف حسابی، ترادف هارمونیکی دارد؟

کوشش شود تا شاگردان جواب ارائه بدارند که سبب اطمینان خاطر شود.

معلومات اضافی برای معلم

- معلم محترم، شاید شاگردان در مورد سؤالها مشکلات داشته باشند، آیا ترادف معکوس عددهای طاق، یک ترادف هارمونیکی شده می‌تواند؟ حد $n-$ام آن را پیدا کنید.

$1\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ 9\ ,\ ...\ ,\ 2n+1$

به ترادف بالا $d = 2, a = 1$است؛ بنا بر آن معکوس آن عبارت از $1\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{5}\ ,\ \frac{1}{7}\ ,\ \frac{1}{9}\ ...\ \frac{1}{2n+1}$ می‌باشد، درین صورت ترادف فوق یک ترادف هارمونیکی می‌باشد و حد $n-$ام آن عبارت از $\frac{1}{2n+1}$ می‌باشد، طوری که $n = 0,1,2,3,\ ...$ قیمت‌ها را گرفته میتوانند.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 128

5- کدام یک از ترادف‌های زیر ترادف حسابی نیست؟

$a)\ 2\,,\ \frac{9}{4}\,,\ \frac{5}{2}\,,\ \frac{11}{4},\ \ldots$

$b)\ 3\,,6\,,9\,,12,\ \ldots$

حل: هرگاه در یک ترادف فرق مشترک بین هر دو عدد پی در پی یک عدد ثابت باشد آن ترادف یک ترادف حسابی می‌باشد، در غیر آن ترادف حسابی نمی‌باشد.

$$a)\ d=\frac{9}{4}-\frac{2}{1}=\frac{9-8}{4}=\frac{1}{4}$$

$$d=\frac{5}{2}-\frac{9}{4}=\frac{10-9}{4}=\frac{1}{4}$$

$$d=\frac{11}{4}-\frac{5}{2}=\frac{11-10}{4}=\frac{1}{4}$$

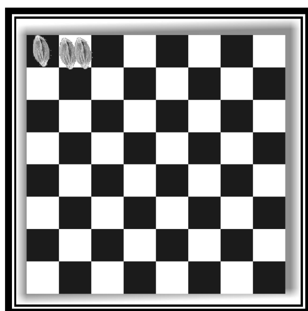
چون فرق مشترک هر دو حد پی در پی یک عدد ثابت $\frac{1}{4}$ است؛ پس ترادف فوق یک ترادف حسابی است.

$$d=6-3=3$$

$$d=9-6=3$$

$$d=12-9=3$$

از اینکه فرق مشترک دو عدد پی در پی جزء b یک عدد ثابت 3 می‌باشد، بنا برآن ترادف مذکور نیز یک ترادف حسابی است؛ پس گفته می‌شود که هر دو ترادف داده شده ترادف حسابی می‌باشند.



فصل چهارم ترادف ها

عنوان درس: ترادف هندسی(*Geometric Sequences*)

صفحهٔ کتاب (129)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • به مفهوم ترادف هندسی بفهمند. • سؤالهای مربوط به ترادف هندسی را حل و فرق بین ترادف هندسی و حسابی را نمایند. • با پیدا کردن دانش و مهارت فوق به خود اعتماد پیدا کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	معلم مُحترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، چارت ورودی را پیشروی صنف بیاویزد و توجه شاگردان را به آن جلب نماید وسؤال ورودی را از ایشان بپرسد؛ طوری که هرگاه در خانهٔ اول شطرنج یک دانه گندم، به خانهٔ دوم دو دانهٔ گندم به همین قسم به هر خانهٔ بعدی دوچند خانهٔ قبلی گندم گذاشته شود: • به خانهٔ سوم چند دانه گندم می‌شود؟ • به خانهٔ ششم چند دانه گندم می‌شود؟ • به خانهٔ هشتم چند دانه گندم می‌شود؟ • به خانهٔ 64–ام چند دانه گندم می‌شود؟ ممکن شاگردان سه سؤال اول را جواب بگویند؛ لیکن تعداد گندم‌های خانهٔ64-ام مشکل ایجاد می‌کند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند وبرایشان بگوید که فعالیت صفحهٔ 129 کتاب را بعد از بحث و گفتگو انجام دهند. در ختم فعالیت نمایندهٔ یک گروه کار گروهی خود را به دیگران توضیح و تشریح کند، در صورت مشکلات معلم رهنمایی و کمک کند. در اخیر موضوع را اینطور تشریح کند.

هرگاه a_1 حد اول ترادف هندسی و q یکعدد ثابت باشد، ترادف به صورت عموم این قسم نوشته می‌شود:

$$a_1\ ,\ a_1q\ ,\ a_1q^2\ ,\ a_1q^3\ ,\ a_1q^4\ ,\ \dots\ ,\ a_1q^{n-1}$$

که a_1 حد اول و q نسبت مشترک می‌باشد، ترادف هندسی با داشتن حد اول و نسبت مشترک طور زیر تعریف می‌شود:

ترادفی که نسبت بین دو حد پی در پی آن یکعدد ثابت q باشد به نام ترادف هندسی یاد می‌شود. برای شاگردان گفته شود، طوری که یک ترادف حسابی دارای ترادف متزاید و متناقص می‌باشد، ترادف هندسی نیز دارای ترادف متزاید و متناقص می‌باشد که با خصوصیات نسبت مشترک q تشخیص می‌شود:

- هرگاه $q > 1$ باشد، ترادف متزاید است به واسطهٔ یک مثال واضح سازد.
- هرگاه $q < 1$ باشد، ترادف متناقص است توسط یک مثال نشان داده شود.
- هرگاه $q = 1$ باشد، ترادف ثابت به دست می‌آید.

معلم یک شاگرد را بخواهد تا مثال اول صفحهٔ 129 کتاب را روی تخته حل کند، همزمان عین مثال را(بدون استفاده از کتاب) بقیه شاگردان در کتابچه‌های خویش حل کنند و حل‌های خویش را با حل روی تخته مقایسه نمایند، در صورت داشتن مشکل معلم کمک نماید.

تحکیم درس(7) دقیقه

– معلم برای تحکیم بخشیدن هر چه بیشتر درس هدایت دهد تا شاگردان فعالیت صفحهٔ 130 کتاب را در کتابچه های خویش انجام دهند.

در یک ترادف هندسی که $a_1 = 2$ و $q = 3$ است، a_3, a_2 و a_4 ترادف را پیدا کنید.

حل:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = a_1 q = 2\cdot 3 = 6$$
$$a_3 = a_1 q^2 = 2\cdot 3^2 = 2\cdot 9 = 18$$
$$a_4 = a_1 q^3 = 2\cdot 3^3 = 2\cdot 27 = 54$$

در اخیر یک شاگرد داوطلب فعالیت را روی تخته حل کند و دیگر شاگردان حل‌های خود را مقایسه در صورت داشتن اشتباه، حل‌های خود را اصلاح نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

– معلم برای اطمینان از یادگیری شاگردان مثال دوم صفحهٔ 130 کتاب درسی را به ایشان بدهد تا در کتابچه‌های خود حل و از روی عدد ثابت q ترادف متزاید و متناقص را نشان دهند.

معلومات اضافی برای معلم

اگر شخصی بپرسد که: هرگاه b, a و c یک ترادف هندسی را بسازند در بین شان چگونه رابطه موجود شده میتواند.(q نسبت مشترک شان می‌باشد)

$$b = aq \qquad c = bq^2 = (aq)\cdot q = aq^2$$
$$b^2 = a^2\cdot q^2 \;\Rightarrow\; b^2 = a\cdot a\cdot q^2 \;\Rightarrow\; a\cdot c \;\Rightarrow\; b^2 = ac$$

یعنی b حدود وسطی a و c می‌باشد. $b^2 = a\cdot c$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 132

1- 5 حد اول ترادف هندسی را بنویسید که حد اول آن 5 و حد اخیر آن $\frac{5}{16}$ باشد.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a=5 \\ n=5 \\ a_n=\frac{5}{16} \\ q=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_n=a\cdot q^{n-1} \Rightarrow \frac{5}{16}=5\cdot q^{5-1} \\ \frac{5}{16}=5\cdot q^4 \Rightarrow q^4=\frac{5}{16\cdot 5}=\frac{5}{80} \\ \sqrt[4]{q^4}=\sqrt[4]{\frac{5}{80}} \Rightarrow q\approx\frac{1.5}{3}\approx\frac{1}{2} \end{array}$$

پس ترادف عبارت است از:

$5\ ,\ 5(\frac{1}{2})\ ,\ 5(\frac{1}{2})^2\ ,\ 5(\frac{1}{2})^3\ ,\ 5(\frac{1}{2})^4$ یا $5\ ,\frac{5}{2}\ ,\frac{5}{4}\ ,\frac{5}{8}\ ,\frac{5}{16}\ ,\ldots,$

2- کدام یک از ترادف های زیر ترادف هندسی است؟

$a)\ \frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\ldots \qquad b)\ -4,-2,0,2,4,\ \ldots$

حل a):

$a)\ \frac{2}{3}\ ,\ -\frac{2}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ -\frac{2}{3}\ ,\ \ldots$

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}=-\frac{2}{3}(\frac{3}{2})=-1$$

$$q=\frac{a_3}{a_2}=\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}(-\frac{3}{2})=-1 \Rightarrow q=\frac{a_4}{a_3}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}=-\frac{2}{3}(\frac{3}{2})=-1$$

جزء a یک ترادف هندسی است.

حل b):

$$q=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2} \Rightarrow q=\frac{0}{-2}=0 \Rightarrow \frac{2}{0}=\infty \Rightarrow \frac{4}{2}=2$$

با مشاهدهٔ فرق مشترک حدود معلوم می‌شود که ترادف جزء b یک ترادف هندسی نمی‌باشد.

نوت: سه سؤال دیگر صفحهٔ 132 به درسهای بعدی حل می‌شود.

فصل چهارم ترادف ها

عنوان درس: دریافت حد n−ام یک ترادف هندسی و حد وسطی ترادف هندسی

صفحهٔ کتاب (130−131)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی − دانشی − مهارتی − ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • به مفهوم پیدا کرن حد n−ام یک ترادف هندسی و همچنان حد وسطی ترادف هندسی بدانند. • در یک ترادف هندسی حد n−ام و حد وسطی را تشخیص و سؤالهای مربوط را حل کنند. • با فراگیری دانش و مهارت فوق خورسند شوند و به خود اعتماد کسب کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	− معلم مُحترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، توجه شاگردان را به سؤالهای زیر جلب کند: • در یک ترادف هندسی a چی را نشان میدهد؟ • در یک ترادف هندسی q چی را نشان میدهد؟ • در یک ترادف هندسی a_n چی را نشان میدهد؟ کوشش شود که جواب سؤالها از شاگردان گرفته شود، در غیر آن معلم کمک کند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

− معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند و حدهای زیر یک ترادف هندسی را روی تخته بنویسد:

$$a \ , \ a\cdot q \ , \ a\cdot q^2 \ , \ a\cdot q^3 \ , \ a\cdot q^4 \ , \ \ldots$$

− معلم برای شاگردان بگوید در گروه‌های خویش بحث نمایند، بعد از بحث و مذاکره، حد وسطی ترادف فوق را پیدا نمایند، همچنان با تقسیم نمودن هر دو حد پی در پی بالای یکدیگر فرق مشترک q را به دست بیاورند. بعد نمایندهٔ یک یا دو گروه کار گروهی خویش را به دیگران توضیح دهد. هرگاه در کار گروه‌ها اشتباهی موجود باشد معلم کمک و رهنمایی کند. در اخیر معلم با یک نظر اندازی اجمالی طریقهٔ پیدا کردن حد n−ام یعنی $a_n = aq^{n-1}$ را توضیح و معلومات بدهد تا شاگردان به مفهوم آن بیشتر بدانند.

− معلم دو شاگرد را به نوبت بخواهد تا شاگرد اولی، مثال اول را و شاگرد دومی مثال دوم را روی تخته حل نمایند، همزمان شاگردان دیگر بدون استفاده از کتاب مثالها را در کتابچه‌های خویش حل نمایند و با حل روی تخته مقایسه کنند در صورتی که اشتباه کرده باشند، اشتباه خویش را تصحیح کنند.

به همین قسم معلم برای شاگردان بگوید: هر گاه M طرفین یک تناسب، a و b وسطین یک تناسب مذکور را تشکیل دهند، چطور میتوان قیمت M را به واسطهٔ عدد حقیقی a و b پیدا کرد؟ شاگردان در گروه‌ها به کتابچه-های خود کار کنند و قیمت‌های a و b را پیدا کنند. نمایندهٔ یک یا دو گروه، کار گروه خویش را به دیگران توضیح کنند، در صورت داشتن مشکل، معلم کمک و رهنمایی کند. در ختم معلم با ترتیب نمودن یک تناسب رابطهٔ $M=\sqrt{ab}$ را دریافت و تشریح کند.

همین قسم به شاگردان گفته شود هرگاه سه حد پی در پی یک ترادف هندسی مانند a_n, a_{n-1} و a_{n+1} داشته باشیم در اینصورت نوشته می‌توانیم:

$$q=\frac{a_n}{a_{n+1}} \ \dots \ \text{I}$$

$$q=\frac{a_{n-1}}{a_n} \ \dots \ \text{II}$$

از مقایسهٔ روابط I و II نوشته می‌توانیم:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow a_n^2=(a_{n+1})(a_{n-1}) \Rightarrow a_n=\sqrt{(a_{n+1})(a_{n-1})}$$

روابط فوق را برای پیدا کردن حد وسطی یک ترادف هندسی میتوان به کاربرد.

- معلم در اخیر یک شاگرد داوطلب را بخواهد تا مثال سوم صفحهٔ 132 کتاب درسی را روی تخته حل کند شاگردان دیگر نیز عین مثال را(بدون استفاده از کتاب) در کتابچه‌های خویش حل کنند و با حل روی تخته مقایسه نمایند. در صورت اشتباه، اشتباه خویش را مرفوع سازند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس هدایت دهد تا شاگردان مثال چهارم صفحهٔ 132 کتاب درسی را به کتابچه‌های خویش(بدون نظر اندازی به کتاب) حل کنند. در اخیر یک شاگرد داوطلب را بخواهد تا روی تخته فعالیت خویش را به دیگران توضیح نماید. هرگاه شاگردی مرتکب اشتباه شده باشد، اشتباه خویش را اصلاح نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای اینکه معلم مطمئن شود آیا آموزش صورت گرفته است یا خیر؟ معلم هدایت دهد تا شاگردان فعالیت اخیر صفحهٔ 132 کتاب را با مثال مربوط آن در کتابچه‌های خود حل کنند. معلم از جریان فعالیت شاگردان نظارت کند. هرگاه شاگردی سؤال داشته باشد معلم رهنمایی و کمک نماید در اخیر دو شاگرد به نوبت فعالیت خویش را روی تخته حل و توضیح کند.

معلومات اضافی برای معلم

- معلم فعالیت صفحهٔ 132 کتاب درسی را طور زیر انجام دهد:

$$a \ , \ a\cdot q \ , \ a\cdot q^2 \ , \ a\cdot q^3 \ , \ a\cdot q^4 \ , \ \dots$$

$$a_n=a\cdot q^{n-1}$$

$$\frac{a_n}{a}=q^{n-1}$$

$$\sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a}}=q \text{ یا } \frac{a_n}{a}=q^{n-1} \Rightarrow \frac{a_n}{a}=q^n\cdot q^{-1} \Rightarrow \frac{a_n}{a}=\frac{q^n}{q} \Rightarrow q^n=\frac{q\cdot a_n}{a} \Rightarrow q=\sqrt[n]{\frac{a_nq}{a}}$$

همین قسم هرگاه سه حد پی در پی a_{n-1}, a_n, a_{n+1} داشته باشیم، q را طور زیر میتوان به دست آورد:

$$q=\frac{a_n}{a_{n-1}} \quad , \quad q=\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

در اینجا a_{n-1} حد قبلی a_n، و a_n حد قبلی a_{n+1} است.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 132

3- حد دوازدهم ترادف هندسی $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \ldots$ را در یافت کنید.

حل:

$$a=5$$
$$n=12$$
$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{5}{2}}{5}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$$
$$a_{12}=a_1\cdot q^{12-1}=5\cdot(\frac{1}{2})^{11}=5(\frac{1}{2})^{11}=\frac{5}{2048}$$

4- وسط هندسی $\sqrt{3}$ و $\frac{\sqrt{3}}{4}$ را در یافت کنید.

حل:

$$M=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3})^2}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

5- سه حد مجهول ترادف هندسی $\frac{1}{3}, ?, ?, ?, 27$ را دریافت کنید.

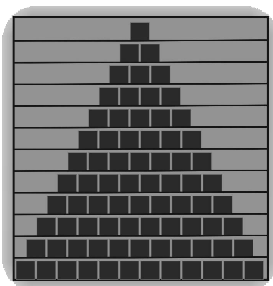
حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=\frac{1}{3} \\ n=5 \\ a_5=27 \\ q=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_5=a_1\cdot q^{5-1}=a_1q^4 \\ 27=\frac{1}{3}\cdot q^4 \\ 81=q^4 \quad\Rightarrow\quad \sqrt[4]{81}=\sqrt{q^4} \quad\Rightarrow\quad q=3 \end{array}$$

$$a_1=\frac{1}{3}$$
$$a_2=a_1\cdot q=\frac{1}{3}\cdot 3=1$$
$$a_3=a_1\cdot q^2=\frac{1}{3}\cdot 3^2=\frac{1}{3}\cdot 9=3$$
$$a_4=a_1q^3=\frac{1}{3}(3^3)=\frac{1}{3}\cdot 27=9$$
$$a_5=a_1\cdot q^4=\frac{1}{3}\cdot 3^4=\frac{1}{3}\cdot 81=27$$

ترادف شکل زیر را دارد:

$$\frac{1}{3}\ ,\ 1\ ,\ 3\ ,\ 9\ ,\ 27\ ,\ \ldots$$



فصل چهارم ترادف ها

عنوان درس: مجموعهٔ قسمی ترادف‌ها

صفحهٔ کتاب (133)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • به مفهوم مجموعهٔ قسمی ترادفها بفهمند. • سؤالهای مجموعهٔ قسمی ترادفها را حل کنند. • با کسب دانش و مهارت فوق خوشی احساس کنند و اعتماد به نفس پیدا کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت، چارت سؤالهای ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، چارت ورودی را پیشروی صنف بیاویزد توجه شاگردان را به سؤال ورودی معطوف بدارد و از یک شاگرد بپرسد: • تعداد قوطی‌های قطار هشتم چند است؟ شاگرد قطی‌ها را شمار می کند و جواب میدهد. همین قسم به شاگردان بگوید تا هر کدام تعداد تمام قوطی‌های الماری را پیدا کنند. شاگردان شمار می کنند و هر کدام جواب می گوید معلم ببیند که جوابها صحیح اند یا نه؟ در اخیر جواب درست را روی تخته بنویسد و به تدریس آغاز نماید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند و بگوید تا فعالیت صفحهٔ 133 کتاب را با مذاکره و مباحثه انجام دهند.

- معلم نمایندهٔ یک یا دو گروه را بخواهد تا کار گروهی خویش را به دیگران توضیح بدارند. امکان دارد جواب سؤالهای اول و دوم برای شاگردان آسان باشد، لیکن حاصل جمع حد n-ام برایشان مشکل باشد، معلم بگوید که پیدا کردن حاصل جمع یک ترادف که بی نهایت حد داشته باشیم کار مشکل نیست، لیکن به طور عموم حاصل جمع n حد اول ترادف $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ را این قسم می‌نویسیم:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

در افادهٔ فوق $\sum$ مستقیماً از یک مجموعه نماینده‌گی می کند که در محاسبات برای مختصر سازی از آن کار می‌گیرند. (i) اندکسی است که از یک الی n قیمت می‌گیرد. تنها همین حرف (i) نیست که به حیث اندکس به

کار می‌رود، بلکه از دیگر حروف مانند k, j و n نیز به حیث اندکس کار می‌گیرند طور زیر:

$\sum_{k=1}^{n} 2k$, $\sum_{i=1}^{n} 2i$ و $\sum_{j=1}^{n} 2j$ هر کدام اندکس‌ها از یک تا n قیمت گرفته می‌تواند و جمع می‌شود طور مثال:

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{i=1}^{n} 2i = \sum_{j=1}^{n} 2j = 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ \dots \ + 2n = 2 + 4 + 6 + \ \dots \ + 2n$$

همین قسم مثال اول کتاب $\sum_{i=1}^{7} i$ را انکشاف داده حاصل جمع آن را پیدا کنند تا شاگردان به مفهوم موضوع بدانند بعد معلم مثال دوم را روی تخته بنویسد و دو شاگرد داوطلب را به نوبت بخواهد تا یک شاگرد جزء a مثال دوم را و شاگرد دیگر جزء b مثال مذکور را روی تخته حل نماید. شاگردان عین مثال را بدون استفاده از کتاب در کتابچه‌های خود حل نمایند. در صورت داشتن مشکل معلم کمک و رهنمایی کند. در اخیر شاگرد روی تخته فعالیت خود را به دیگران توضیح کند و شاگردان صورت حل خویش را مقایسه و اشتباه خود را اصلاح نمایند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن و آموزش بیشتر درس مثال سوم و چهارم 134 کتاب را به شاگردان بدهد تا در کتابچه-های خود(بدون استفاده از کتاب) حل کنند بعد یک یا دو شاگرد را بخواهد تا فعالیت خویش را به دیگران توضیح کنند در صورت داشتن مشکل، معلم کمک و رهنمایی کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم جهت مطمئن شدن از آموزش شاگردان سؤالهای زیر را مطرح نماید و آنها را ارزیابی کند.

1. آیا میتوانیم به طور عموم n حد اول یک ترادف را به شکل حاصل جمع شان بنویسیم؟
2. در $\sum_{i=1}^{n} a_i$، i را به نام چی یاد می کنند؟
3. در افادۀ فوق i کدام قیمت‌ها را گرفته میتواند؟

معلومات اضافی برای معلم

- معلم محترم به شاگردان بگوید: در صورت تعویض متحول n از جنس L که حد آخری است مجموعۀ قسمی ترادفهای اعداد جفت را طور زیر به دست می‌آوریم:

برای اعداد جفت $a = 2$ و $d = 2$ حال با در نظرداشت فارمول حد آخری L قیمت n را به دست می‌آوریم:

$$L = a + (n-1)\cdot d \quad \Rightarrow \ 2 + (n-1)\cdot 2 = 2 + 2n - 2$$

$$L = 2n \quad \Rightarrow \ n = \frac{L}{2}$$

حال در فارمول عمومی $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ به عوض $n, \frac{L}{2}$ را می‌نویسیم:

$$S=\frac{\frac{L}{2}}{2}\left[2a+(\frac{L}{2}-1)\cdot d\right] \Rightarrow \frac{\frac{L}{2}}{2}\left[2a+(\frac{L-2}{2})2\right]$$

$$S=\frac{L}{4}(2a+L-2)=\frac{2aL+L^2-2L}{4}$$

$$S=\frac{2L(a-1)+L^2}{4}=\frac{2L(2-1)+L^2}{4}=\frac{2L+L^2}{4}=\frac{L(L+2)}{4}$$

افادۀ آخری را به صورت دو قوس طور زیر میتوان نوشت:

$$S=\frac{(L+a)(L-a+2)}{4}$$

حال میخواهیم (L) را برای اعداد طاق ... $1,3,5,7,9,$ نیز به دست بیاوریم:

$$L=a+(n-1)d$$

اگر $a=1$ و $d=2$ باشد داریم:

$$L=1+(n-1)\cdot 2=1+2n-2=2n-1 \Rightarrow L+1=2n \Rightarrow \boxed{n=\frac{L+1}{2}}$$

$$S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]=\frac{1}{2}\cdot\frac{L+1}{2}\left[2a+(\frac{L+1}{2}-1)\cdot 2\right]$$

$$S=\frac{L+1}{4}\left[2a+\frac{L+1-2}{2}\cdot 2\right]=\frac{L+1}{4}(2a+L-1)=\frac{(L+a)(2\cdot a+L-1)}{4}=\frac{(L+a)(2\cdot 1+L-1)}{4}$$

$$S=\frac{(L+a)(L+1)}{4}=\frac{(L+a)(L+a-1+1)}{4}=\frac{(L+a)(L-1+2)}{4}$$

$$S=\frac{(L+a)(L-a+2)}{4}$$

به حالت سوم میخواهیم با به کارگیری حد آخری برای اعداد مسلسل فارمول به دست بیاوریم. برای این منظور اعداد ... $1,2,3,4,5,5,$ را در نظر می گیریم: $a=1$ و $d=1$

$$L=a+(n-1)d=1+(n-1)\cdot 1=1+n-1 \Rightarrow \boxed{L=n}$$

حال در فارمول $S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$ عوض n، L را جابه جا می کنیم:

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{L}{2}\{2\cdot 1+(L-1)\cdot 1\}$$

$$S=\frac{L}{2}\{2+L-1\}=\frac{L}{2}(L+1)$$

$$S=L(\frac{L+1}{2}) \quad \wedge \quad \frac{(L+1)(L-1+1)}{2}$$

$$S=\frac{(L+1)(L-a+1)}{2}$$

جواب به سؤال های تمرین صفحۀ 136

1- مجموعه های زیر را محاسبه کنید:

$a)\ \sum_{i=1}^{6}\sqrt{i}=?$, $b)\ 3+\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{i+1}?$, $c)\ \sum_{k=1}^{3}(4k^2-3k)=?$

حل:

$$a)\ \sum_{i=1}^{6}\sqrt{i} = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}+\sqrt{6} = 3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$$
$$= 3+1.4+1.73+2.23+2.44 = 10.81$$

$$b)\ 3\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{i+1} = 3(\frac{1}{1+1}+\frac{1}{2+1}+\frac{1}{3+1}+\frac{1}{4+1}+\frac{1}{5+1}+\frac{1}{6+1}) = 3(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7})$$
$$= 3(\frac{420+280+210+168+140+120}{840}) = 3(\frac{1338}{840}) = \frac{4041}{840} = 4.77$$

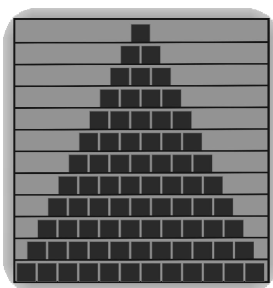
$$c)\ \sum_{k=1}^{3}(4k^2-3k) = (4\cdot1^2-3\cdot1)+(4\cdot2^2-3\cdot2)+(4\cdot3^2-3\cdot3) = (4-3)+(16-6)+(36-9)$$
$$= 1+10+27 = 38$$

2- مجموعه های زیر را به شکل $\sum$ بنویسید.

$$a)\ \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{19}{20}$$
$$b)\ 1+4+9+...+n^2$$
$$c)\ 1+3+5+7+...+(2n-1)$$

حل:

$$a)\ \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{19}{20} = \sum_{k=2}^{20}\frac{k-1}{k}$$
$$b)\ 1+4+9+...+n^2 = \sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$c)\ 1+3+5+7+...+(2n-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$



فصل چهارم ترادف ها

عنوان درس: مجموعهٔ قسمی ترادف‌ها

صفحهٔ کتاب (133)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • به مفهوم حاصل جمع قسمی حدود یک ترادف بدانند. • سؤالهای مجموعهٔ قسمی یک ترادف را حل کنند. • فرق بین مجموعهٔ قسمی یک ترادف و مجموعهٔ تمام حدود آن را کرده بتوانند. • از پیدا نمودن فرق دو مجموعهٔ قسمی یک ترادف و مجموع تمام حدود به خود باورمند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت سؤال ورودی صفحهٔ 133 کتاب
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس، یکبار دیگر توجه شاگردان را به سؤال ورودی جلب کند و بپرسد که: • در قطار هشتم تعداد قوطی‌ها چند است؟ • آیا می‌توانید از روی تمام قوطی‌های شکل ورودی ترادف شان را بنویسید؟ ممکن شاگردان با دانش کسب شده از درس گذشته جواب بگویند در صورت مشکل معلم کمک و رهنمایی کند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم توجه شاگردان را به موضوع جلب نماید و بگوید تاحال تنها حاصل جمع n حد یک ترادف را به دست می‌آوریم؛ اگر بخواهیم حاصل جمع تمام حدود $\{a_n\} n \in N$ را به دست آوریم، آیا حاصل جمع حدود را به شکل افاده‌ها می‌توان نوشت؟ اگر شاگردان جواب بگویند خوب، در غیر آن معلم طور زیر بنویسد:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots \ + = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

به این صورت i تمام اعداد طبیعی را گرفته می‌تواند که $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ به نام سلسلهٔ بی‌نهایت یاد می‌شود.

بااستفاده از بعضی قوانین ریاضی می توانیم مجموعهٔ عناصر n حد اولیهٔ یک سلسله را پیدا کنیم؛ مانند:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots \ + a_n + \ \dots$$

که به نام مجموعهٔ قسمی n حد سلسلهٔ نامبرده یاد می‌شود که آن را به S_n نشان می‌دهیم و می نویسیم:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ ... \ + a_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

بعد معلم یک شاگرد داوطلب را بخواهد تا مثال صفحهٔ 135 کتاب درسی را روی تخته حل کند. در اخیر درس سه شاگرد را بخواهد تا بالترتیب سه خاصیت سلسله‌ها مربوط صفحهٔ 136 کتاب را تشریح کنند در صورت داشتن مشکل کمک و رهنمایی کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس سؤالهای زیر را به شاگردان بدهد تا در کتابچه‌های خویش کار کنند.

یعنی S_5, S_{10} سلسلهٔ $1+2+3+ \ ... \ + n + \ ...$ را محاسبه کنند.

شاگردان به کتابچه‌های خویش کار کنند، بعد یک شاگرد داوطلب صورت حل خویش را روی تخته به دیگران توضیح کند، اگر کدام شاگرد مرتکب اشتباه شده باشد حل خویش را اصلاح کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

معلم برای اطمینان خویش از آموزش شاگردان توسط سؤالهای زیر ایشان را ارزیابی کند.

1. $\sum_{i=1}^{n} a_i , i$ به نام چی یاد می‌شود و کدام قیمت‌ها را گرفته می‌تواند؟
2. در افادهٔ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k , k$ به نام چی یاد می‌شود و کدام قیمت‌ها را گرفته می‌تواند؟

کوشش شود که جوابها از شاگردان به دست آورده شود.

معلومات اضافی برای معلم

L حد آخری و d فرق مشترک است. میخواهیم که فارمول مجموعهٔ ترادف را از جنس L پیدا کنیم.

حال قیمت n را پیدا می کنیم.

$$L = a + (n-1) \cdot d$$
$$L - a = nd - d \quad \Rightarrow \ L - a + d = nd$$

طوری‌که برای اعداد جفت $d = 2, a = 2$ می‌شود، بنا بر آن داریم که:

$$\frac{L-a+d}{d} = n \quad \Rightarrow \ n = \frac{L-2+2}{2} = \frac{L}{2} \quad \Rightarrow \ \boxed{n = \frac{1}{2}L}$$

حال در فارمو $S = n(n+1)$ به عوض n قیمت آن $\frac{1}{2}L$ را می گذاریم:

$$S = \frac{1}{2}L(\frac{1}{2}L + 1) = \frac{1}{4}L^2 - \frac{1}{2}L \quad \Rightarrow \ S = \frac{L^2 - 2L}{4}$$

چون $d=2$ است؛ پس: $S=\frac{L^2+2L}{2\cdot 2} \Rightarrow S=\frac{l^2+2l}{2\cdot d}$

همین قسم به اعدا طاق ... ,1,3,5,7,9 ، $a=1$ و $d=2$ است.

بنابر آن داریم که: $\boxed{n=\frac{L+1}{2}}$ $\Leftarrow$ $L=a+(n-1)\cdot d \Rightarrow L=1+2n-1$ یا $L=2n-2 \Rightarrow L+1=2n \Rightarrow$

حال در فارمول $S=n^2$ به عوض n قیمت آن یعنی $\frac{L+1}{2}$ را قرار می‌دهیم و داریم که:

$$S=(\frac{L+1}{2})^2=(\frac{L+a}{2})^2$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 136

3- مجموعه های قسمی زیر را به دست آورید:

$a)\ \sum_{i=4}^{n} i(i+2)$ $\quad b)\ \sum_{i=1}^{n}(3i-2)$ $\quad c)\ \sum_{i=1}^{n}(2+5i)$

حل:

$$a)\ \sum_{i=4}^{n} i(i+2)=4(4+2)+5(5+2)+6(6+2)+\ \dots\ +n(n+2)=4\cdot 6+5\cdot 7+6\cdot 8+\ \dots\ +n(n+2)$$
$$=24+35+48+\ \dots\ +n(n+2)$$

$$b)\ \sum_{i=1}^{n}(3i-2)=(3\cdot 1-2)+(3\cdot 2-2)+(3\cdot 3-2)+\ \dots\ +(3n-2)=1+4+7+\ \dots\ +(3n-2)$$

$$c)\ \sum_{i=1}^{n}(2+5i)=(2+5\cdot 1)+(2+5\cdot 2)+(2+5\cdot 3)+\ \dots\ +(2+5n)=7+12+17+\ \dots\ +(2+5n)$$

$a_1 =$
$d =$
$a_n =$
$1+2+3+4+ \ldots +n=$
$\frac{n}{2}\cdot[2a+(n-1)\cdot d]$

فصل چهارم ترادف ها

عنوان درس: مجموعهٔ قسمی n حد اولیهٔ یک ترادف حسابی

صفحهٔ کتاب (137)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • به مفهوم مجموعهٔ n حد اولیهٔ یک ترادف حسابی بفهمند. • سؤالهای مربوط سلسله‌های حسابی را حل کنند. • با فهمیدن مفهوم سلسله‌های حسابی و حل سؤالهای مربوط احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت افاده های مربوط به سؤال ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، چارت مربوط سؤال ورودی را پیشروی صنف بیاویزد، توجه شاگردان را به آن جلب و سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد: • در چارت $a_n = ?, d = ?, a = ?$ هرکدام چی را افاده می‌کند؟ • افادهٔ $1+2+3+4+ \ldots +n$ کدام مجموعه را نشان میدهد؟ • هرگاه $a_1+a_2+a_3+ \ldots +a_n$ یک ترادف باشد، آیا $a_1+a_2+a_3+ \ldots +a_n$ مجموعهٔ قسمی ترادف بالا شده می‌تواند؟ - معلم کوشش کند تا جوابها از شاگردان به دست آورده شود، در غیر آن معلم تشریح نماید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم کند که برای جمع حدود صفحهٔ 137 کتاب در مشورت باهم فارمول عمومی را ثبوت کنند. بعد از انجام فعالیت‌ها نمایندهٔ یک گروه داوطلبانه به روی تخته فارمول را ثبوت کند.

هرگاه نمایندهٔ مذکور مرتکب اشتباه شده باشد توسط نمایندهٔ یک گروه دیگر تصحیح شود، بعد از اجرای فعالیت گروهی با استفاده از فارمول، سلسلهٔ حسابی را تعریف کند تا شاگردان به مفهوم سلسلهٔ حسابی بفهمند.

- معلم دو شاگرد داوطلب را بخواهد تا به ترتیب مثال اول و دوم را روی تخته حل کنند، همزمان شاگردان دیگر نیز مثالها را بدون استفاده از کتاب در کتابچه‌های خویش حل کنند. در اخیر دو شاگرد فعالیت‌های خویش را به دیگران توضیح دهند و شاگردان حل‌های خویش را با آن مقایسه نمایند، در صورت داشتن مشکل معلم رهنمایی نماید.

همین قسم معلم فعالیت صفحهٔ 139 کتاب را به شاگردان بدهد تا در کتابچه‌های خود انجام دهند و حاصل جمع عدد

طبیعی پی در پی یعنی $S=\frac{n}{2}(n+1)$ را به دست بیاورند، هرگاه شاگردان مشکل داشتند معلم ثبوت نماید و به اعداد طبیعی پی در پی $a=1$ و $d=1$ در نظر بگیرد و در فارمول $S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ محاسبه را به اتمام برساند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای هرچه بیشتر تحکیم درس مثال اعداد طبیعی جفت پی در پی را که مربوط صفحهٔ 139 کتاب است و همچنان مثال سوم همین صفحه را به شاگردان بدهد که به کتابچه‌های خویش حل کنند(بدون نظر اندازی به کتاب). بعد یک شاگرد داوطلب آن را به روی تخته حل کند و شاگردان دیگر صورت حل خویش را با آن مقایسه نمایند، در صورت داشتن مشکل معلم کمک نماید.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای مطمئن شدن از فراگیری شاگردان با طرح سؤالهای زیر آنها را ارزیابی کند:

1. کی میتواند فارمول حاصل جمع اعداد طبیعی طاق پی در پی را روی تخته بنویسد؟
2. به افاده‌های زیر کدام یک سلسلهٔ حسابی و کدام یک ترادف حسابی است؟

$a_1, a_2, a_3, \ \dots\ , a_n$

$a_1+a_2+a_3+\ \dots\ +a_n$

معلومات اضافی برای معلم

معلم محترم، دو فارمول زیر برای مجموعهٔ قسمی n حد اول یک ترادف حسابی دریافت گردید

$$S_n=\frac{n(a+a_n)}{2}\ \dots\ (I) \qquad , \qquad S=\frac{n[2a+(n-1)d]}{2}\ \dots\ (II)$$

از فارمول I زمانی استفاده می‌شود که حد اول و حد $n-$ام معلوم باشد.

از فارمولII زمانی کار گرفته می‌شود که حد اول، فرق مشترک و تعداد حدها معلوم باشند؛ مانند مثالهای زیر:

1. ردیف حسابی $2,5,8,\ \dots$ را در نظر بگیرید و مجموعهٔ هشت حد آن را دریافت کنید.

حل: به ردیف نامبرده $n=8\ ,\ d=5-2=3\ ,\ a=2$ می‌باشد؛ بنابر آن با استفاده از فارمولII می‌نویسیم:

$$S_8=\frac{8[(2\cdot 2+(8-1)\cdot 3]}{2}=\frac{8[4+(7)\cdot 3]}{2}=\frac{8\cdot(4+21)}{2}=\frac{8\cdot 25}{2}$$

$$S_8=\frac{200}{2}=100$$

2. مجموعهٔ ردیف حسابی $21,17,13,9,5$ را پیدا کنید.

حل: در ردیف فوق $a=21, a_n=5, n=5$ است؛ پس از فارمول I کار می‌گیریم:

$$S_5=\frac{5(21+5)}{2}=\frac{5(26)}{2}=\frac{130}{2}\ \Rightarrow\ S_5=65$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 140

1- حد n-ام و حا صل جمع ده حد ترادف های حسابی زیر را دریافت کنید:

$i)\ \ 2, 0, -2, -4, \ldots$

$ii)\ 1, 5, 9, 13, \ldots$

$iii)\ -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

حل (i):

$$a_{10} = a_1 + (n-1)d = 2 + (10-1)(-2) = 2 + 9(-2) = 2 - 18 = -16$$

$$S_{10} = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] = \frac{10}{2}\left[2\cdot 2 + (10-1)(-2)\right]$$

$$S_{10} = 5\left[4 + 9(-2)\right] = 5(4-18) = 5(-14) = -70$$

حل (ii):

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ d = 4 \\ n = 10 \\ a_{10} = ? \\ S_{10} = ? \end{array}\right\} \text{یا} \quad \begin{array}{l} a_{10} = 1 + (10-1)4 = 1 + 9\cdot 4 = 1 + 36 = 37 \\ a_n = a + (n-1)d = 1 + (n-1)4 = 1 + 4n - 4 = 4n - 3 \\ S_{10} = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] = \frac{10}{2}\left[2\cdot 1 + (10-1)4\right] = 5\left[2 + 9\cdot(4)\right] = 5(2+36) \\ S_{10} = 5\cdot 38 = 190 \end{array}$$

حل (iii):

$$\left.\begin{array}{l} a = -2 \\ d = 1 \\ n = 10 \\ a_{10} = ? \\ S_{10} = ? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a_{10} = a + (n-1)4 = -2 + (10-1)\cdot 1 = -2 + 9\cdot 1 = -2 + 9 = 7 \\ a_n = a + (n-1)d = -2 + (n-1)\cdot 1 = -2 + n - 1 = n - 3 = 10 - 3 = 7 \\ S_{10} = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] = \frac{10}{2}\left[2(-2) + (10-1)\cdot 1\right] = 5\left[-4 + 9\right] = 5\cdot 5 = 25 \end{array}$$

2- اگر یک ترادف به شکل ...,2,5,8,11 داده شده باشد، قیمت مجموع های زیر را حساب کنید.

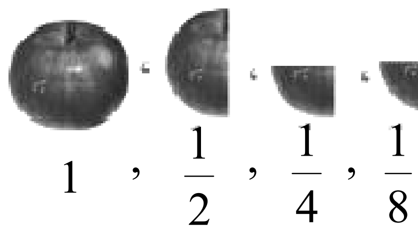
$a)\ S_8 \qquad\qquad b)\ S_{10}$

حل $a)$:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ d = 3 \\ n = 8 \\ S_8 = ? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S_8 = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] = \frac{8}{2}\left[2\cdot 2 + (8-1)\cdot 3\right] = 4(4 + 7\cdot 3) = 4(4+21) \\ S_8 = 4\cdot 25 = 100 \end{array}$$

حل $b)$:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ d = 3 \\ n = 10 \\ S_{10} = ? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S_{10} = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] = \frac{10}{2}\left[2\cdot 2 + (10-1)\cdot 3\right] = 5(4 + 9\cdot 3) = 5(4+27) \\ S_{10} = 5\cdot 31 = 155 \end{array}$$



فصل چهارم ترادف ها

عنوان درس: حاصل جمع n حد یک ترادف هندسی

صفحهٔ کتاب (141)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • به مفهوم حاصل جمع n حد یک ترادف هندسی یا سلسلهٔ هندسی بفهمند. • سؤالهای مربوط سلسلهٔ هندسی را حل کنند. • با فهمیدن سلسلهٔ هندسی و حل سؤالهای مربوط احساس خوشی نمایند و به خود اعتماد پیدا کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت مربوط سؤال ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی تدریس، چارت سؤال ورودی را پیشروی صنف بیاویزد و توجه شاگردان را به آن جلب نماید و سؤال کند: • کی گفته می‌تواند که دو $(\frac{1}{2})$ چند می‌شود؟ • کی گفته می‌تواند که $\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}$ چند می‌شود؟ • کی گفته می‌تواند که $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{16}$ چند می‌شود؟ • آیا گفته می‌توانید که در افادهٔ اخیر هر حد از حد دیگر چطور به دست می‌آید؟ کوشش شود که جواب از شاگردان گرفته شود، در غیر آن بر ایشان گفته شود که در هر سؤال تمام حدود را با هم جمع می‌کنیم؛ لیکن به افادهٔ اخیر هر حد را ضرب $\frac{1}{2}$ می‌کنیم بالآخره حد آخری به دست می‌آید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند و بر ایشان بگوید تا فعالیت صفحهٔ 141 کتاب را با مذاکره و بحث در گروه‌های شان انجام دهند و در اخیر حاصل جمع n حد یک ترادف هندسی یا سلسلهٔ هندسی را به دست بیاورند. بعد نمایندهٔ یک یا دو گروه روی تخته فعالیت خویش را به دیگران توضیح دهند. هر گاه کدام گروهی مرتکب اشتباه شده باشد به واسطهٔ گروه دیگری در فضای صمیمیت اصلاح شود، در صورت داشتن مشکل معلم کمک و رهنمایی کند، طوری‌که با در نظر داشت تمام مراحل فارمول $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$ را در حالی‌که $q \neq 1$

می‌باشد به دست بیاورید و به سؤالهای شاگردان جواب بگوید.

- معلم دو شاگرد داوطلب را بخواهد تا به ترتیب شاگرد اول مثال اول و شاگرد دوم مثال دوم را روی تخته حل کنند. همزمان شاگردان دیگر عین مثالها را در کتابچه‌های خویش(بدون استفاده از کتاب) حل کنند و حل‌های خویش را با حل روی تخته مقایسه و در صورت اشتباه، حل‌های خود را اصلاح نمایند. در صورت ضرورت معلم کمک و رهنمایی کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای هر چه بیشتر تحکیم بخشیدن درس به شاگردان سؤال زیر را بدهد تا در کتابچه‌های خویش حل کنند.

- هرگاه در یک سلسلهٔ هندسی $a_1 = 3$ و $q = 2$ باشد، در اینصورت S_6 را پیدا کنید.

- معلم محترم از جریان فعالیت نظارت کند و در اخیر یک شاگرد داوطلب سؤال را روی تخته حل کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم جهت مطمئن شدن از آموزش شاگردان آنها را به واسطهٔ سؤالهای زیر ارزیابی کند:

1. در فارمول $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ سلسلهٔ هندسی بگویید که:
   - a_1 چی چیز را نشان می‌دهد؟
   - q چی چیز را نشان می‌دهد؟
   - S_n چی چیز را نشان می‌دهد؟
2. در ترادف $2, 6, 18, 54 \ ...$ حاصل جمع ده حد آن را پیدا کنید، کوشش شود هر کدام شاگردان خود شان حل نمایند.

معلومات اضافی برای معلم

- معلم محترم فارمول $S_n = \dfrac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ حاصل جمع n حد یک ترادف هندسی را ارائه می‌کند. تطبیق فارمول مذکور در سؤالها طور زیر صورت می‌گیرد:

1. در تصاعد هندسی $3, 6, 12, \ ...$ حاصل جمع ده حد اول آن را دریافت کنید. دراین تصاعد $a = 3,\ q = \dfrac{6}{3} = 2$ و $n = 10$ است.

حل:

$$S_{10} = \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{3(1024 - 1)}{1} = 3 \cdot 1023 = 3069$$

2. اگر حد اول یک تصاعد هندسی 2, نسبت مشترک شان(-2) باشد، حاصل جمع چند حد آن 22 می‌شود؟

حل:

$$a = 2 \quad , \quad q = -2 \quad , \quad S_n = 22 \quad , \quad n = ?$$

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{2\left[(-2)^n - 1\right]}{-2 - 1} = 22$$

دو طرف مساوات را ضرب $(\frac{1}{2})$ می‌کنیم:

$$\Rightarrow \left\{\frac{2[(-2)^n-1]}{-3}\right\}\frac{1}{2}=22\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(-2)^n-1}{-3}=11 \Rightarrow (-2)^n-1=-33$$

$$\Rightarrow (-2)^n=-33+1 \Rightarrow (-2)^n=-32 \Rightarrow (-2)^n=(-2)^5 \Rightarrow \boxed{n=5}$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 142

1- در ترادف هندسی ...,$\frac{2}{9}$,$\frac{2}{3}$, 2 حاصل جمع 10حد آن را دریافت کنید.

حل:

$$a=2,\quad q=\frac{1}{3},\quad n=10,\quad S_{10}=?$$

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_{10}=\frac{2(1-\frac{1}{3})^{10}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{2\left[1-(\frac{1}{3})^{10}\right]}{\frac{3-1}{3}}=\frac{2\left[1-(\frac{1}{3})^{10}\right]}{\frac{2}{3}}=\frac{2\cdot 3\left[-(\frac{1}{3})^{10}\right]}{2}=3\cdot\left[1-(\frac{1}{3})^{10}\right]$$

$$S_{10}=3-3\cdot 3^{-10}=3-3^{-9}=3-\frac{1}{3^9}=3-\frac{1}{19683}=\frac{3\cdot 19683-1}{19683}$$

$$S_{10}=\frac{59049}{19683}=3$$

2- در ترادف هندسی 384, ... ,3,6,12 تعداد حدودو مجموع آن را دریافت کنید.

حل:

$$a=3,\quad q=2,\quad a_n=384,\quad n=?,\quad S_n=?$$

$$a_n=a\cdot q^{n-1} \Rightarrow 384=3\cdot 2^{n-1}\ /\div 3 \Rightarrow 2^{n-1}=128 \Rightarrow 2^n\cdot 2^{-1}=128$$

$$\Rightarrow \frac{2^n}{2}=128 \Rightarrow 2^n=256 \Rightarrow 2^n=2^8 \Rightarrow \boxed{n=8}$$

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_8=\frac{3(1-2^8)}{1-2}=\frac{3(1-256)}{-1}=\frac{3(-255)}{-1} \Rightarrow \boxed{S_8=765}$$

3- در ترادف هندسی ... ,4,12,36 حاصل جمع چند حدآن مساوی به 484 می شود؟ آن را به دست آورید.

حل:

$$a=4,\quad q=3,\quad S_n=484,\quad n=?,\quad a_n=?$$

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{4(1-3^n)}{1-3}=484 \quad \text{یا} \quad \frac{4(3^n-1)}{3-1}=484$$

$$=\frac{4\cdot(3^n-1)}{2}\cdot 2=484/\cdot 2 \Rightarrow 4\cdot(3^n-1)=968 \Rightarrow 4\cdot 3^n-4=968$$

$$4\cdot 3^n=968+4 \Rightarrow 4\cdot 3^n=972/\div 4$$

$$3^n=243 \Rightarrow 3^n=3^5 \Rightarrow \boxed{n=5}$$

$$a_4=4\cdot 3^{4-1}=4\cdot 3^3=4\cdot 27=108$$

$$a_n=a\cdot q^{n-1} \Rightarrow a_5=4\cdot 3^{5-1}=4\cdot 3^4=4\cdot 81=324$$

امتحان $=4+12+36+108+324=484$

$$S_\infty = \frac{a}{1-q}, |q|<1$$

فصل چهارم ترادف ها

عنوان درس: سلسلۀ هندسی لایتناهی

صفحۀ کتاب (143)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی	شاگردان قادر شوند تا:
- دانشی	• به مفهوم سلسله‌های متقارب و متباعد هندسی پی ببرند.
- مهارتی	• سلسله‌های متقارب و متباعد را از همدیگر تشخیص و تمیز کنند.
- ذهنیتی	• با دانستن سلسله‌های متقارب و متباعد خورسند شوند و به خود اعتماد کسب کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی تدریس، توجه شاگردان را به بخش و ورودی جلب کند: • اگر حدهای یک ترادف بالترتیب کوچک شده بروند ترادف چی نوع ترادف شمرده می‌شود؟ • اگر حدهای یک ترادف به ترتیب بزرگ شده بروند ترادف مذکور چی نوع ترادف شمرده می‌شود؟ کوشش شود که جوابها از شاگردان گرفته شود، در غیر آن معلم محترم جواب بگوید طوری‌که ترادف اول متقارب و ترادف دوم متباعد می‌باشد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم یک شاگرد داوطلب را بخواهد و این طور سؤال را مطرح کند:

اگر $a=3$ و $q=\frac{1}{2}$ باشد ترادف هندسی را پیدا نمایید و در ضمن فارمول عمومی سلسلۀ هندسی؛ یعنی $a(\frac{q^n-1}{q-1})$ را تطبیق و حاصل جمع پنج حد اول را به دست بیاورید.

هرگاه شاگردان مشکلی داشته باشند معلم کمک نماید، طور زیر حل کند:

$$S_5=\frac{3\cdot(\frac{1}{2})^5-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{3(\frac{1}{32}-1)}{\frac{1-2}{2}}=3\cdot(\frac{\frac{1-32}{32}}{-\frac{1}{2}})=\frac{3\cdot(-\frac{31}{32})}{\frac{-1}{2}}=3(-\frac{31}{32}\cdot\frac{-2}{1})=3\cdot(\frac{31}{16})=\frac{93}{16}$$

به همین قسم یک شاگرد داوطلب دیگر را بخواهد تا اگر $q=2, a=3$ باشد ترادف هندسی را پیدا کند، در صورتی‌که مشکل موجود باشد معلم طور زیر آن‌را حل کند: $S_5=\frac{3\cdot(2^5-1)}{2-1}=\frac{3(32-1)}{1}=3\cdot 31=93$

سپس از شاگردان سؤال کند که در جواب‌های اول و دوم چی فرق می‌بینید، کدام یک کوچک و کدام یک بزرگ

است و فرق مشترک هر کدام چند است؟ ممکن تمام شاگردان جواب بگویند، لیکن معلم برای هر چه فهماندن بیشتر شاگردان با استفاده از مثالهای فوق موضوع را اینطور تشریح نماید:

هرگاه در یک سلسلهٔ هندسی $|q|>1$ باشد و تعداد حدود آن معلوم نباشد سلسلهٔ مذکور به نام سلسلهٔ متباعد (*Divergent series*) یاد می‌شود، اگر $|q|<1$ باشد آن را به نام سلسلهٔ متقارب(*Convergent series*) یاد می‌کنند؛ که حاصل جمع هر دو از فارمول $S=a(\frac{q^n-1}{q-1})$ به دست می‌آید.

- معلم در ختم درس دو شاگرد داوطلب را بخواهد تا یکی آن مثال اول را و دیگر آن مثال دوم صفحهٔ 144 کتاب را نوبت روی تخته حل کنند.

همزمان شاگردان دیگر عین دو مثال را(بدون استفاده از کتاب) در کتابچه‌های خویش حل نمایند.

- معلم از فعالیت شاگردان نظارت به عمل آورد در صورت داشتن مشکل ایشان را کمک و رهنمایی کند. در ختم، شاگردان حل‌های خود را با حل روی تخته مقایسه و در صورت اشتباه حل‌های خود را اصلاح نمایند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس مثال‌های سوم و چهارم کتاب را باسهم گیری شاگردان روی تخته حل کند، طوریکه مراحل حل مثال‌ها را قدم به قدم در نظر بگیرد.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم غرض اطمینان از فراگیری شاگردان، توسط سؤالهای زیر ایشان را ارزیابی کند.

- هرگاه عدد $\frac{1}{2}$ به توانهای $3,2$ و 5 بالا برده شود، اعداد حاصله بزرگ می‌شوند یا کوچک؟
- هرگاه عدد 2 به توانهای $3,2$ و 5 رفع شود، اعداد حاصله به ترتیب بزرگ می‌شوند یا کوچک؟
- اگر $|q|<1$ باشد و تعداد حدود معلوم نباشد کدام سلسله حاصل می‌شود؟
- هرگاه $|q|>1$ باشد و تعداد حدود معلوم نباشد کدام سلسله به دست می آید؟

کوشش شود تا جوابها را شاگردان بگویند در صورت داشتن مشکل معلم کمک و رهنمایی کند.

معلومات اضافی برای معلم

- معلم محترم تعداد دانه های گندم64 خانهٔ شطرنج مربوط سؤال ورودی صفحهٔ 129 کتاب درسی چنین تعیین می‌شود:

حل: اگر $q=2, a=1$ و $n=8$ باشد؛ داریم: $a_{64}=1\cdot 2^{64-1}=2^{63}=9.22337\cdot 10^{18}$ دانهٔ گندم

حال مطالعه می‌کنیم که به تمام خانه‌های شطرنج طور مجموعی چند دانه گندم موجود می‌شود.

حل: طوری‌که $q=2, a=1$ و $n=64$ می‌باشد به رویت فارمول عمومی می‌نویسیم:

$$S_{64}=\frac{a\cdot(q^n-1)}{q-1}=\frac{1\cdot(2^{64}-1)}{2-1}=2^{64}=1.84467\cdot 10^{19}-1\approx 1.84467\cdot 10^{19}$$ دانه گندم

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 146

1- مجموع ترادف های هندسی زیر را دریابید:

$i)\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots$, $ii)\ 5+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots$

حل i) سلسله متقارب است:

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ q=\frac{1}{3} \\ S_n=? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} |q|=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}<1 \\ S_n=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{3-1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \end{array}$$

حل ii) سلسله متقارب است:

$$\left.\begin{array}{l} a=5 \\ q=\frac{1}{5} \\ S_n=? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} |q|=\left|\frac{1}{5}\right|=\frac{1}{5}<1 \\ S_n=\frac{a}{1-q}=\frac{5}{\frac{1}{1}-\frac{1}{5}}=\frac{5}{\frac{5-1}{5}}=\frac{5}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{1}\cdot\frac{5}{4}=\frac{25}{4}=6.25 \end{array}$$

2- کسر اعشاری زیر را به کسر عام تبدیل کنید.

$a)\ 0.\overline{5}$ $\qquad\qquad$ $b)\ 0.2\overline{4}$

حل a):

$$0.2\overline{4}=0.2444\ ...=0.2+0.04+0.004+0.0004+\ ...=\frac{2}{10}+\frac{4}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{4}{10000}+\ ...$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{4}{100}\left[1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ ...\right]$$

به داخل قوس یک سلسلهٔ هندسی بی نهایت است؛ یعنی: $S_n=?\ ,\ a=1\ ,\ q=\frac{1}{10}\ ,$

پس سلسله متقارت است: $|q|=\left|\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}<1$

$$S_n=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{\frac{10-1}{10}}=\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{10}{9}=\frac{10}{9}$$

$$0.2\overline{4}=\frac{1}{5}+\frac{4}{100}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{5}+\frac{4}{90}=\frac{18+4}{90}=\frac{22}{90}=\frac{11}{45}\ \Rightarrow\ \boxed{0.2\overline{4}=\frac{11}{45}}$$

حل b):

$$0.\overline{5}=0.5555\ ...$$

$$0.5=0.5+0.05+0.005+0.0005+\ ...\quad=\frac{5}{10}+\frac{5}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{5}{10000}+\ ...$$

$$=\frac{5}{10}(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\ ...)$$

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ q=\frac{1}{10} \\ S_n=? \end{array}\right\} \quad |q|=\left|\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}<1$$

به داخل قوس یک سلسلهٔ هندسی بی نهایت است. $|q\left|\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}<1$ $\qquad$ $a=1\ ,\ q=\frac{1}{10}\ ,\ S_n=?$

چون $|q|<1$ است؛ پس سلسله متقارب می‌باشد:

$$S_n=\frac{5}{10}\cdot\frac{a}{1-q}=\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{\frac{10-1}{10}}=\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{5}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{5}{9}\ \Rightarrow\ \boxed{S_n=\frac{5}{9}=0.\overline{5}}$$

حل تمرینات عمومی فصل چهارم(7 ساعت درسی)

سؤالات زیر را به دقت خوانده برای هر سؤال چهار جواب داده شده است، جواب درست را دریافت و دور آن را حلقـه نمایید.

1. حد n-ام ترادف $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},...$ عبارت است از:

$a)\ \frac{\sqrt{n}-1}{n}$ $b)\ \frac{\sqrt{n}+3}{n+2}$ $c)\ \frac{n}{n-1}$ (d) $\frac{n+1}{n}$

2. اگر $a_n=\frac{3n-1}{2n-1}$ حد $n-$ام ترادف باشد؛ کدام حد این ترادف $\frac{11}{7}$ می‌شود:

$a)$ 3 (b) 4 $c)$ 5 $d)$ 6

3. حددوازدهم ترادف حسابی $-9,-5,-1,3,...$ عبارت است از:

(a) 35 $b)$ 38 $c)$ -35 $d)$ -38

4. فرق مشترک ترادف حسابی 0.1 , 0.4 , 0.7 , 1 , 1.3,... عبارت است از:

$a)$ 0.5 $b)$ 0.1 (c) 0.3 $d)$ 0.2

5. نسبت مشترک ترادف هندسی عبارت است از 96, 48 ,24, 12 ,6,...

$a)\ -\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ $c)\ \frac{2}{3}$ $d)\ -\frac{2}{3}$

6. حد دهم ترادف هندسی $5,\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{4},\frac{5}{8},\frac{5}{16},.....$ عبارت است از:

$a)\ \frac{3}{512}$ $b)\ \frac{5}{512}$ $c)\ -\frac{5}{512}$ (d) $\frac{5}{512}$

7. فارمول حاصل جمع n حد یک ترادف هندسی عبارت است از:

$a)\ S_n=a\frac{1+q^n}{1-q}$ (b) $S=a\frac{q^n-1}{q-1}$ $c)\ S=a\frac{1+q^n}{1+q}$ $d)$ هیچ کدام

8. در سلسله های متقارب غیرمعین هندسی نسبت مشترک q عبارت است از:

$a)\ q=0$ $b)\ |q|>1$ (c) $|q|<1$ $d)$ هیچ کدام

سؤالهای زیر را حل کنید:

1. چند عدد دو رقمی طبیعی داریم که مضرب شان چهار باشد؟

حل: نخست اعداد طبیعی دو رقمی را می نویسیم:

10 , 11 , (12) , 13 , 14 , 15 , (16), 17 , 18 , 19 , (20), 21 , 22 , 23
(24), 25 , 26 , 27 , (28), 29 , 30 , 31 , (32), 33 , 34 , 35 , (36), 37
38 , 39 , (40) , 41 , 42 , 43 , (44), 45 , 46 , 47 , (48), 49 , 50 , 51
(52) , 53 , 54 , 55 , (56), 57 , 58 , 59 , (60), 61 , 62 , 63 , (64), 65
66 , 67 , (68), 69 , 70 , 71 , (72), 73 , 74 , 75 , (76), 77 , 78 , 79
(80), 81 , 82 , 83 , (84), 85 , 86 , 87 , (88), 89 , 90 , 91 , (92), 93
94 , 95 , (96), 97 , 98 , 99

به تعداد بیست و دو عدد دو رقمی داریم که مضرب عدد چهار می‌باشند.

2. بین اعداد 21 و 31 سه عدد را جا دهید. $21,\square,\square,\square,31$

حل:

$$a_1 = 21$$
$$a_1 + 4d = 31$$
$$4d = 31 - 21 = 10$$
$$d = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$$

پس سلسلهٔ اعداد مورد نظر عبارت اند از:

$$21, 23.5, 26, 28.5, 31$$

3. اگر مجموعهٔ حد اول و آخر ترادف عددی 124 باشد و مجموع n حد اول آن 3720 باشد تعداد حدود این ترادف کدام است؟

حل:

$$a_1 + a_n = 124$$
$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n] = 3720$$
$$= \frac{n}{2}[124] = 3720$$
$$n[62] = 3720 \Rightarrow n = \frac{3720}{62} \Rightarrow \boxed{n = 60}$$

4. مجموع 100 حد ترادف زیر را به دست آورید.

$$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

حل:

$$\left.\begin{aligned} a &= 3 \\ d &= 2 \\ n &= 100 \\ S_{100} &= ? \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{100}{2}[2 \cdot 3 + (100-1)2] \\ &S_{100} = 50[6 + 99 \cdot 2] = 50[6 + 198] = 50[204] \\ &\boxed{S_{100} = 10200} \end{aligned}$$

5. اگر حد دوم یک ترادف هندسی 6 و حد هفتم آن 192 باشد نسبت مشترک شان را تعیین کنید.

حل:

$$\left.\begin{aligned} aq &= 6 \\ aq^6 &= 192 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(aq)q^5 = 192 \\ &6q^5 = 192 / \div 6 \Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q^5 = 2^5 \Rightarrow \boxed{q = 2} \end{aligned}$$

6. مجموع 8 حد اول یک ترادف هندسی 17 برابر مجموع چهارحد اولی آن است، نسبت مشترک این ترادف را حساب کنید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} S_8 = a\dfrac{1-q^8}{1-q} \\ \\ S_4 = a\dfrac{1-q^4}{1-q} \end{array}\right\} \begin{array}{l} a\dfrac{1-q^8}{1-q} = 17a\dfrac{1-q^4}{1-q} \ /\cdot(1-q) \\ 1-q^8 = 17-17q^4 \ \Rightarrow\ 1-q^8-17+17q^4=0 \ \Rightarrow\ -q^8+17q^4-16=0 \ /\cdot(-1) \\ q^8-17q^4+16=0 \end{array}$$

بعد از وضع $q^4 = y$ داریم:

$$y^2-17y+16=0$$
$$\Delta = 289-64=225 \ \Rightarrow\ \sqrt{\Delta}=\pm 15$$
$$y=\frac{17+15}{2}=\frac{32}{2}=16$$
$$q^4=16 \ \Rightarrow\ q^4=2^4 \ \Rightarrow\ \boxed{q=2}$$

7. حاصل جمع سلسلهٔ زیر را به دست آورید:

$$0.1+0.01+0.001+0.0001+...$$

حل:

$$0.1+0.01+0.001+0.0001=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\ ...$$
$$=\frac{1}{10}\left[1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\ ...\right]$$
$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1-q}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{\frac{1}{1}-\frac{1}{9}}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{9}$$

8. حد اول یک ترادف هندسی نامحدود 9 و حد چهارم آن $\frac{1}{9}$ می باشد مجموع حدود این ترادف را دریافت کنید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a=9 \\ aq^4=\dfrac{1}{9} \\ S_n=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} aq^4=\dfrac{1}{9} \ \Rightarrow\ 9q^4=\dfrac{1}{9} \ \Rightarrow\ 81q^4=1 \\ q^4=\dfrac{1}{81} \ \Rightarrow\ q^4=(\dfrac{1}{3})^4 \ \Rightarrow\ \boxed{q=\dfrac{1}{3}} \\ S_n=9\dfrac{1-q^n}{1-q}=9\dfrac{\frac{1}{1}-(\frac{1}{3})^5}{1-\frac{1}{3}}=9\dfrac{\frac{1}{1}-\frac{1}{243}}{\frac{2}{3}}=9\dfrac{\frac{243-1}{243}}{\frac{2}{3}}=9\dfrac{242}{243}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{9\cdot 242}{162}=\dfrac{1089}{81}=13.\overline{4} \end{array}$$

9. بین اعداد 3 و 96 به تعداد 4 عدد جا دهید.

$$3, \square, \square, \square, \square, 96$$

حل:

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6$$

$$\left.\begin{aligned} a&=3 \\ aq^5&=96 \\ n&=6 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &3q^5=96 \quad /\div 3 \\ &q^5=32 \ \Rightarrow q^5=2^5 \ \Rightarrow \boxed{q=2} \end{aligned}$$

$$3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ 48\ ,\ 96$$

$$a_n=\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$$

$$a_2=\sqrt{a_1\cdot a_3}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$$

$$a_3=\sqrt{a_2\cdot a_4}=\sqrt{6\cdot 24}=\sqrt{144}=12$$

$$a_4=\sqrt{a_3\cdot a_5}=\sqrt{12\cdot 48}=\sqrt{576}=24$$

$$a_5=\sqrt{a_4\cdot a_6}=\sqrt{24\cdot 96}=\sqrt{2304}=48$$

10. حاصل جمع 8 حد اول سلسلهٔ هندسی $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\ldots$ را معلوم کنید.

حل:

$$S_n=a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\left.\begin{aligned} a&=2 \\ q&=\frac{1}{3} \\ n&=8 \\ S_8&=? \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &S_8=2\frac{1-(\frac{1}{3})^8}{1-(\frac{1}{3})} \\ &S_8=2\frac{1-\frac{1}{6561}}{1-\frac{1}{3}}=2\frac{\frac{6561-1}{6561}}{\frac{3-1}{3}}=2\frac{\frac{6560}{6561}}{\frac{2}{3}}=2\frac{6560}{6561}\cdot\frac{3}{2}=\frac{19680}{6561}=2.9995\overline{4} \ \Rightarrow \boxed{S_8\approx 3} \end{aligned}$$

11. اگر $a=4$, $d=3$ باشد ترادف هارمونیکی آن را برای $n=12$ به دست آورید.

حل:

$$4\ ,\ 7\ ,\ 10\ ,\ 13\ ,\ 16\ ,\ 19\ ,\ 22\ ,\ 25\ ,\ 28\ ,\ 31\ ,\ 34\ ,\ 37$$

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{13},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{19},\ \frac{1}{22},\ \frac{1}{25},\ \frac{1}{28},\ \frac{1}{31},\ \frac{1}{34},\ \frac{1}{37}$$

12. اعداد اعشاری زیر را با استفاده از سلسلهٔ متقارب به کسر عام به دست آورید.

$a)\ 2.\overline{8} \qquad b)\ 3.\overline{57}$

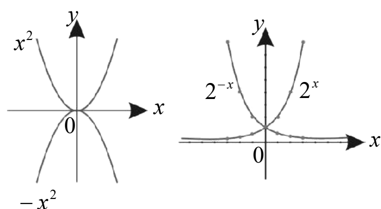
حل a):

$$
\begin{aligned}
2.\overline{8} &= 2.8888\ \ldots = 2+0.8+0.08+0.008+0.0008+\ \ldots \\
&= 2+\frac{8}{10}+\frac{8}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{8}{10000}+\ \ldots \\
&= 2+\frac{8}{10}\cdot\left[1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\ \ldots\right] = 2+\frac{8}{10}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}} \\
&= 2+\frac{8}{10}\cdot\frac{10}{9} = 2+\frac{8}{9} = \frac{18+8}{9} = \frac{26}{9}
\end{aligned}
$$

حل b):

$$
\begin{aligned}
3.5\overline{7} &= 3.57575757\ \ldots \\
&= 3+0.57+0.0057+0.000057+0.00000057+\ \ldots \\
&= 3+\frac{57}{100}+\frac{57}{10000}+\frac{57}{1000000}+\frac{57}{100000000}+\ \ldots \\
&= 3+\frac{57}{100}\cdot\left[1+\frac{1}{100}+\frac{1}{10000}+\frac{1}{1000000}+\frac{1}{100000000}+\ \ldots\right] \\
&= 3+\frac{57}{100}\cdot\frac{1}{\frac{99}{100}} = 3+\frac{57}{100}\cdot\frac{100}{99} = 3+\frac{57}{99} = \frac{297+57}{99} = \frac{354}{99} = \frac{118}{33} \quad \Rightarrow \quad \boxed{3.5\overline{7} = \frac{118}{33}}
\end{aligned}
$$

فصل پنجم توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی



عنوان درس:توابع اکسپوننشیل(*Exponential functions*)

صفحۀ کتاب (153)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم تابع‌های اکسپوننشیل را بفهمند. • تابع‌های اکسپوننشیل را رسم و سؤالهای مربوط را حل کنند. • با فهمیدن و رسم نمودن گراف‌های تابع‌های اکسپوننشیل احساس خوشی نموده به خود اعتماد پیدا کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت(چارت)
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	معلم مُحترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس، شاگردان را متوجه قسمت ورودی ساخته و سؤال کند: • شما از صنف گذشته میدانید که گراف‌های $f(x)=x^2$ و $f(x)=-x^2$ نظر به محور y متناظر یگدیگر اند. • آیا گفته می‌توانید که کدام یک از اشکال بخش ورودی این درس مربوط این تابع‌ها است؟ به همین قسم در شکل‌های ورودی یک شکل دیگر هم دیده می‌شود.آیا منحنی‌های آن هم متناظر یکدیگر اند؟ در صورتی‌که شاگردان مشکلات داشته باشند معلم آنها را کمک کند، بعد ثابت خواهد شد که گراف‌های تابع‌های $f(x)=2^x$ و $f(x)=2^{-x}$ هم متناظر یکدیگر اند و یا نه.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم مُحترم در آغاز فعالیت شکل عمومی تابع $f(x)=a^x$ را با استفاده از کتاب درسی به شاگردان تعریف و بگوید که تابع فوق به نام تابع اکسپوننشیل به قاعدۀ a نامیده می‌شود.

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نماید تا فعالیت صفحۀ 153 کتاب درسی را در مشورت باهم انجام دهند.

به همین ترتیب گراف تابع $f(x)=2^{-x}$ را رسم نمایند، گراف‌ها وقیمت‌های هر دو تابع را باهم مقایسه کنند با استفاده از قیمت‌ها تابع متزاید و متناقص را نشان دهند.

- معلم در ختم فعالیت نماینده‌های دو گروه را به نوبت بخواهد که فعالیت انجام دادۀ خود را به دیگران توضیح و تشریح نمایند. در صورتی‌که کدام گروه اشتباه کرده باشد توسط گروه دیگر اصلاح شود.

- معلم یک شاگرد داوطلب را بخوهد که فعالیت فوق را برای تابع $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ انجام دهـد. در صـورت مشـکلات کمک و رهنمایی کنید.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم موضوع تابع اکسپوننشیل برای شاگردان جدید بـوده و تـا انـدازه‌یـی مشـکل هـم اسـت. جهـت تحکـیم بخشیدن درس، درس را با سهم فعال شاگردان به شـکل سـؤال و جـواب تکـرار کـرده تـا شـاگردان در موضـوع تـابع اکسپوننشیل دانش زیادتر کسب نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای این‌که معلم محترم از آموزش درس مطمئن شود، شاگردان را با پرسیدن سؤالهای ذیل ارزیابی نماید:

1. گراف‌های $f(x)=x^2$ و $f(x)=-x^2$ نظر به کدام محور متناظر یکدیگر اند؟
2. آیا قیمت $f(x)=x^2$ برای قیمت‌های $x\in Z$ همیشه مثبت است، یا منفی؟
3. آیا در تابع $f(x)=a^x$ قیمت $a=1$ شده می‌تواند یا $a\neq 1$ می باشد؟

جواب به سؤال های تمرین صفحۀ 156

گراف‌های توابع اکسپوننشیل زیر را در سیستم مختصات قایم رسم کنید.

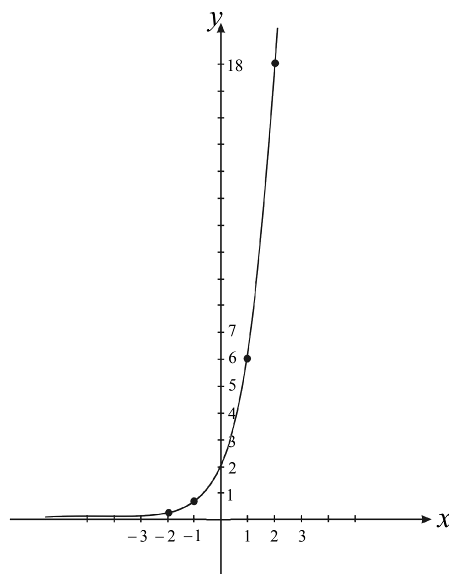
$a)\ \ f(x)=2\cdot 3^x$

$b)\ \ f(x)=2\cdot 3^{-x}$

حل a): در هر تابع به x قیمت‌های مثبت و منفی داده و قیمت تابع را به دست می‌آوریم:

x	$f(x)$
0	2
1	6
-1	$\frac{2}{3}$
2	18
-2	$\frac{2}{9}$

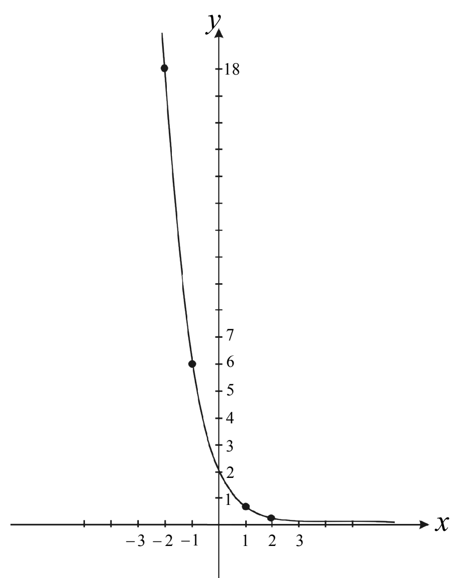
$f(x)=2\cdot 3^x$

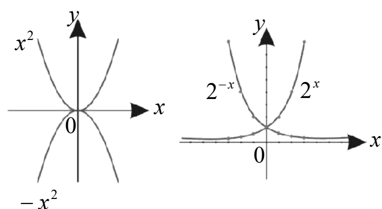


حل $b)$**:**

x	$f(x)$
0	2
1	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{2}{9}$
-1	6
-2	18

$f(x) = 2 \cdot 3^{-x}$





فصل پنجم توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

عنوان درس: توابع اکسپوننشیل(*Exponential functions*)

صفحهٔ کتاب (154)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

<table>
<tr><td>اهداف آموزشی
- دانشی
- مهارتی
- ذهنیتی</td><td>شاگردان قادر شوند تا:
• در تابع‌های اکسپوننشیل تابع متزاید و متناقص را بشناسند.
• تابع‌های متزاید و متناقص را تشخیص و از هم فرق کنند.
• با کسب دانش و مهارت فوق احساس خوشی نمایند.</td></tr>
<tr><td>روش های تدریس</td><td>سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی</td></tr>
<tr><td>مواد ممد درسی</td><td>مواد مورد ضرورت(چارت)</td></tr>
<tr><td>توضیح ورودی (5) دقیقه</td><td>- معلم مُحترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی تدریس، شاگردان را متوجه سؤال ورودی قبلی ساخته و بپرسد:
• تابع $f(x)=2^x$ محور y را در کدام نقطه قطع می‌کند؟
• تابع $f(x)=2^{-x}$ محور y را در کدام نقطه قطع می‌کند؟
• این دو تابع نظر به کدام محور، متناظر یکدیگر اند؟
ممکن شاگردان جواب بگویند، در غیر آن معلم محترم با استفاده از درس گذشته جواب بگوید.</td></tr>
</table>

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم درس را به صورت سؤال و جواب چنین آغاز نماید:

کی گفته می‌تواند هرگاه در تابع $f(x)=a^x$ ، $a>1$ باشد تابع متزاید است یا متناقص؟

کی گفته می‌تواند هرگاه در تابع $f(x)=a^x$ ، $a<1$ باشد تابع متزاید است یا متناقص؟

هرگاه شاگردان جواب گفته توانستند خوب، در غیر آن معلم چنین تشریح کند:

هرگاه در تابع اکسپوننشیل $a>1$ باشد تابع متزاید اگر $a<1$ باشد تابع متناقص است و اگر $a=1$ باشد، پس تابع ثابت است.

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند. جدول‌های صفحهٔ 154 کتاب که یکی آن به $f(x)=2^x$ و دیگرش به $f(x)=2^{-x}$ مربوط است. کمیات وضعیهٔ هر نقطه را در سیستم کمیات وضعیه تعیین و گراف‌های هر دو تابع را رسم و در آن متزاید و متناقص بودن منحنی را در مرحلهٔ اول از روی قیمت و بعد در منحنی نشان دهند.

- معلم بعد از انجام این فعالیت نماینده‌های دو گروه را بخواهد تا فعالیت انجام دادهٔ گروه خود را به دیگران تشریح کنند در صورتی که کدام گروه اشتباه کرده باشد توسط گروه دیگر اصلاح شود.

- معلم یک شاگرد داوطلب را بخواهد تا جدول مثال صفحهٔ 155 کتاب را تشکیل داده و با استفاده از آن گراف را به صورت دقیق رسم کند و دیگر شاگردان بدون استفاده از کتاب در کتابچه‌های خود رسم کنند.
- معلم شاگردان ضعیف را کمک کند.
- معلم در در پایان درس خاصیت‌های تابع اکسپوننشیل را یکایک به شاگردان بیان کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم جهت تحکیم بهتر درس هدایت دهد تا شاگردان در تابع‌های $f(x)=2^x$, $f(x)=\frac{1}{2^x}$ ساحه‌های متزاید و متناقص را نشان دهند و نقطهٔ تقاطع با محور y را دریافت بدارند و در صورت مشکلات معلم کمک و رهنمایی نماید.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای اینکه معلم محترم از آموزش و یادگیری درس مطمئن شود؛ پس شاگردان را با پرسیدن سؤالهای ذیل ارزیابی نماید:

1. آیا هر تابع اکسپوننشیل برای قیمت‌های $a>1$ متزاید می‌باشد؟
2. هرگاه ناحیهٔ تعریف هر تابع اکسپوننشیل تمام اعداد حقیقی باشند ناحیهٔ قیمت‌های آن کدام اعداد شده می‌توانند؟
3. آیا هر تابع اکسپوننشیل، تابع معکوس دارد؟

معلومات اضافی برای معلم

معلم محترم فعالیت صفحهٔ 155 کتاب به طور ذیل ثبوت میشود، در صورتی‌که شاگردان نتوانستند شما ثبوت نمایید:

$$1)\ f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \quad , \quad 2)\ f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$$

$$3)\ f(a\cdot x)=(f(x))^a$$

ثبوت: هرگاه $(x,y)\in R$ باشد؛پس:

$$1)\ f(x+y)=a^{(x+y)}=a^x\cdot a^y=f(x)\cdot f(y) \Rightarrow f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

$$2)\ f(x-y)=a^{(x-y)}=a^x\cdot a^{-y}=a^x(a^y)^{-1}=a^x\cdot\frac{1}{a^y}=f(x)\cdot\frac{1}{f(y)}=\frac{f(x)}{f(y)} \Rightarrow f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$$

$$3)\ f(a\cdot x)=a^{ax}=(a^x)^a=(f(x))^a \Rightarrow f(a\cdot x)=(f(x))^a$$

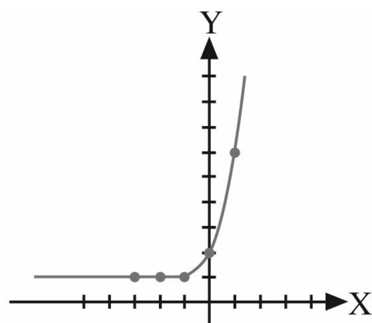
جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 156

گراف‌های توابع اکسپوننشیل زیر را در سیستم مختصات قایم رسم کنید.

$a)\ f(x)=2.3^x \qquad b)\ f(x)=2.3^{-x} \qquad c)\ f(x)=(\frac{1}{2})^x \qquad d)\ f(x)=(4)^{-x}$

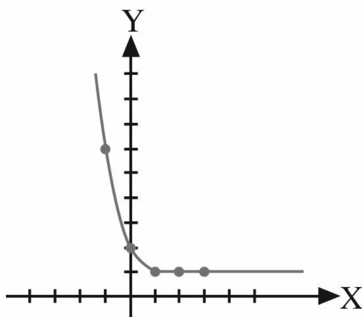
حل a): $f(x)=2.3^x$

x	$f(x)$
0	2
1	6
2	18
-1	0.67
-2	0.22
-3	0.07



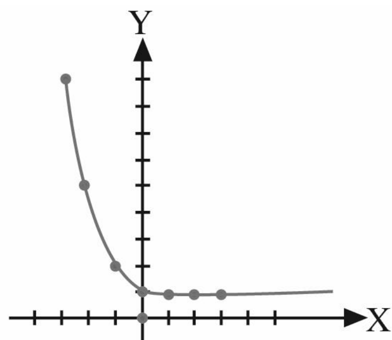
حل b): $f(x) = 2.3^{-x}$

x	$f(x)$
0	2
1	0.67
2	0.22
3	0.07
-1	6
-2	18



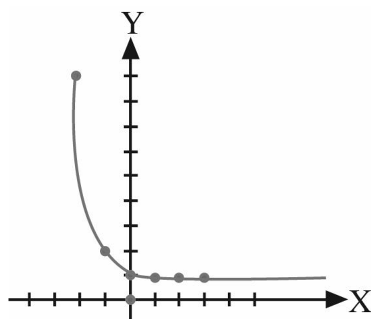
حل c): $f(x) = (\frac{1}{2})^{x}$

x	y
0	1
1	0.5
2	0.25
3	0.12
-1	2
-2	4
-3	8



حل d): $f(x) = (4)^{-x}$

x	y
0	1
1	0.25
2	0.06
-1	4
-2	16



فصل پنجم توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

عنوان درس: لوگاریتم

صفحهٔ کتاب (157)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم لوگاریتم را بفهمند. • قیمت‌های لوگاریتمی اعداد طاقت‌دار را تشخیص و تعیین نمایند. • قیمت‌های لوگاریتمی اعداد را پیدا کنند. • با انجام فعالیت‌های فوق احساس خوشی نموده، به خود اعتماد پیدا کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	معلم مُحترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی تدریس، شاگردان را متوجه قسمت ورودی ساخته و از آنها بپرسد: • در افادهٔ $y = 3^x$ به قیمت‌های $y, x = 2,3,4$ کدام قیمت‌ها را اختیار می کند. • آیا تابع $y = a^x$ را به کدام شکل دیگر هم نوشته کرده می‌توانیم؟ هرگاه شاگردان جوابها را گفته توانستند خوب، در غیر آن معلم محترم به جواب سؤالها بپردازد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند، تا فعالیت صفحهٔ 157 کتاب را بعد از بحث و مذاکره در گروه های شان انجام دهند و به سؤال‌های مربوط آن جواب‌های درست را دریافت نمایند.

- معلم نماینده‌های یک یا دو گروه را بخواهد تا فعالیت انجام دادهٔ گروه خود را به دیگران توضیح دهند، هرگاه کدام گروه اشتباه کرده باشد توسط گروه دیگر اصلاح گردد و در صورت مشکلات معلم کمک و رهنمایی نماید.

- معلم محترم در ختم فعالیت، حالت عمومی و تعریف لوگاریتم را توسط افادهٔ $y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$ به شاگردان توضیح دهد تا شاگردان به مفهوم و ضرورت لوگاریتم بفهمند، بعد مثال مربوط آن را به تخته حل و طریقهٔ آن را تشریح کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم برای تحکیم بهتر درس سؤال‌هایی؛ مانند مثال حل شده را روی تخته بنویسد و به شاگردان بگوید که در کتابچه‌های خود حل نمایند از کار شاگردان مراقبت به عمل آورده در پایان درس یک شاگرد را بخواهد که سؤال را به روی تخته حل نماید، در صورت مشکلات معلم کمک و رهنمایی کند. دیگر شاگردان صورت حل خویش را با حل روی تخته مقایسه کرده و اشتباهات را اصلاح نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای اینکه معلم محترم از آموزش و یادگیری درس مطمئن شود شاگردان را با پرسیدن سؤالهای زیر ارزیابی کنید:

$1)\ \log_2 9 = ?$ $\quad 2)\ \log_2 16 = ?$ $\quad 3)\ \log_3 27$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 158

1- روابط لوگاریتمی زیر را به افاده های معادل آن بنویسید.

$a)\ \log_{10} N = x \quad , \quad b)\ \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$

$c)\ \log_9 81 = 2 \quad , \quad d)\ \log_5 5 = 1$

حل: میدانیم که لوگاریتم نوع دیگری از طاقت‌ها است؛ پس افادهٔ مربوط آن‌را به شکل طاقت به دست می‌آوریم:

$a)\ \log_{10} N = x \Rightarrow N = 10^x$

$b)\ \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2 \Rightarrow 36 = (\frac{1}{6})^{-2}$

$c)\ \log_9 81 = 2 \Rightarrow 81 = 9^2$

$d)\ \log_5 5 = 1 \Rightarrow 5 = 5^1$

2- افاده های زیر را با در نظرداشت مفهوم لوگاریتم به افاده های معادل آن بنویسید.

حل:

$a)\ 4^3 = 256 \Rightarrow \log_4 256 = 3$

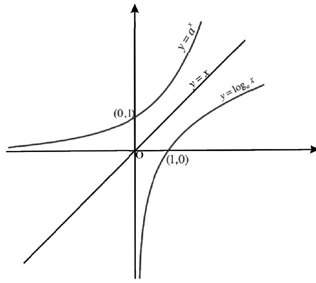
$b)\ 2^5 = 32 \Rightarrow \log_2 32 = 5$

$c)\ 10^4 = 10000 \Rightarrow \log_{10} 10000 = 4$

$d)\ 10^{-1} = 10^y \Rightarrow \log_{10} 10^{-1} = y$

$e)\ y = 2^x \Rightarrow \log_2 y = x$

$f)\ y = 3^x \Rightarrow \log_3 y = x$



فصل پنجم توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

عنوان درس: توابع لوگاریتمی

صفحهٔ کتاب (159)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی	شاگردان قادر شوند تا:
- دانشی	• مفهوم توابع لوگاریتمی را بفهمند.
- مهارتی	• سؤالهای توابع لوگاریتمی را حل و گرافهای آنها را رسم کنند.
- ذهنیتی	• در وقت ضرورت از توابع لوگاریتمی استفاده نموده احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	معلم مُحترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی تدریس، شاگردان را متوجه عنوان کتاب و قسمت ورودی بسازد و سؤالهای زیر را از آنها بپرسد: • کی گفته می‌تواند که معکوس عدد 8 کدام عدد است؟ • کی گفته می‌تواند که معکوس عدد $\frac{2}{3}$ کدام عدد است؟ • کی گفته می‌تواند کدام نوع توابع، توابع معکوس دارند؟ - معلم کوشش کند که جوابها را از شاگردان به دست بیاورد در صورت مشکلات، شاگردان را کمک و رهنمایی کند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم اول دربارهٔ تعریف و مشخصات توابع لوگاریتمی به شاگردان معلومات مختصر بدهد، سپس توابع $f(x)=a^x$ و $g(x)=\log_a x$ را که معکوس یکدیگر گفته می‌شوند معرفی و گراف‌های شان را رسم نماید و نشان دهد که این گراف‌ها نسبت به مستقیم $y=x$ متناظر یکدیگر اند.

- معلم شاگردان را وظیفه دهد که مثال اول صفحهٔ 160 کتاب درسی را بدون استفاده از کتاب در کتابچه‌های خود حل و گراف آن را ترسیم نمایند. از کار و فعالیت شاگردان مراقبت شود در صورت مشکلات کمک و رهنمایی کند.

- معلم در ختم یک شاگرد داوطلب را بخواهد که مثال مذکور را به روی تخته حل نماید، در صورت اشتباه معلم کمک کند. دیگر شاگردان حل‌های خود را با حل تخته مقایسه و اشتباهات را اصلاح کنند.

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند و به آنها بگوید که بعد از بحث و مذاکره در بین اعضای گروه فعالیت همین صفحه را انجام دهند.

در پایان فعالیت، نماینده‌های یک یا دو گروه کار انجام دادهٔ گروه خود را به دیگران تشریح نمایند در صورت اشتباه، اشتباه توسط نمایندهٔ گروه دیگر اصلاح شود.(حل این فعالیت در معلومات اضافی داده شده است.)

- معلم محترم در ختم درس هر کدام از خاصیت‌های توابع لوگاریتمی را جدا، جدا توضیح و تشریح کند تا شاگردان مفهوم و خاصیت‌های توابع لوگاریتمی را بفهمند.
- معلم قیمت‌های لوگاریتمی آن‌را دریافت کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم جهت تحکیم و فهمیدن بهتر درس مثال دوم صفحهٔ 161 کتاب درسی را به روی تخته بنویسد و به شاگردان بگوید که بدون استفاده از کتاب در کتابچه‌های خود حل نمایند. در پایان یک شاگرد داوطلب مثال متذکره را به روی تخته حل کند و دیگر شاگردان صورت حل خویش را با حل روی تخته مقایسه نمایند و در صورت مشکلات کمک و رهنمایی کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم محترم برای اینکه از آموزش و یادگیری درس مطمئن شود مثال سوم کتاب درسی را روی تخته نوشته کند و به شاگردان هدایت دهد که بدون استفاده از کتاب در کتابچه‌های خود حل نمایند. بعد یک شاگرد را بخواهد که مثال مذکور را به تخته حل نماید، درصورت مشکلات معلم کمک و رهنمایی کند.

معلومات اضافی برای معلم

- معلم محترم فعالیت صفحهٔ 160 کتاب درسی را که گراف‌های توابع اکسپوننشیل $2^x, (\frac{1}{2})^x$ اند قرار ذیل انجام شود:

تابع $y=2^x$ را در نظر می‌گیریم:

x	-2	-1	0	1	2
$y=2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

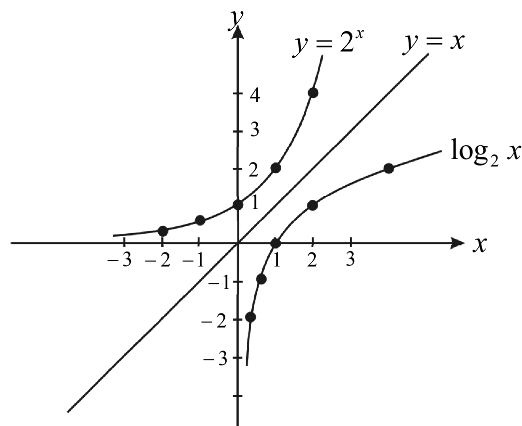
$$\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix}\right\} (1,2) \quad , \quad \left.\begin{matrix} x=2 \\ y=4 \end{matrix}\right\} (2,4)$$

تابع معکوس $y=2^x$ عبارت تابع $f(x)=\log_2^x$ است.

x	1	2
$f(x)$	0	1

$$\left.\begin{matrix} x=1 \\ f(x)=\log_2^x=0 \end{matrix}\right\} (1,0)$$

$$\left.\begin{matrix} x=2 \\ f(x)=1 \end{matrix}\right\} (2,1)$$



و همچنان تابع $y=(\frac{1}{2})^x$ در نظر می گیریم:

x	0	1	2
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

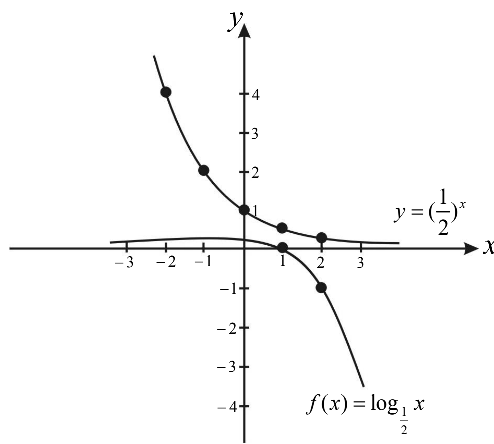
$\left.\begin{matrix}x=0\\y=1\end{matrix}\right\}(0,1)$, $\left.\begin{matrix}x=1\\y=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}(1,\frac{1}{2})$, $\left.\begin{matrix}x=2\\y=\frac{1}{4}\end{matrix}\right\}(2,\frac{1}{4})$

تابع معکوس $y=(\frac{1}{2})^x$ عبارت از $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ است.

x	1	2
$g(x)$	0	-1

$\left.\begin{matrix}x=1\\\log_{\frac{1}{2}} x=0\end{matrix}\right\}(1,0)$

$\left.\begin{matrix}x=2\\\log_{\frac{1}{2}} x=-1\end{matrix}\right\}(2,-1)$



جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 162

1- برای تابع $f(x)=\log_2 x$ قیمت های $f(2)$, $f(1)$, $f(\frac{1}{32})$, $f(32)$ را دریافت کنید.

حل:

$$f(x)=\log_2 x$$
$$f(2)=\log_2 2=1$$
$$f(1)=\log_2 1=0$$
$$f(\frac{1}{32})=\log_2\frac{1}{32}=\log_2 2^{-5}=-5\log_2 2=-5\cdot 1=-5$$
$$f(32)=\log_2 32=\log_2 2^5=5\cdot\log_2 2=5\cdot 1=5$$

2- برای تابع $f(x)=\log_3 x$ قیمت های $f(1)$, $f(\frac{1}{81})$ را دریافت کنید.

حل:

$$f(x)=\log_3 x$$
$$f(1)=\log_3 1=0$$
$$f(\frac{1}{81})=\log_3(\frac{1}{81})=\log_3 3^{-4}=-4\cdot\log_3 3=-4$$

$$\left.\begin{matrix}\log_e N \\ \log_{10} 10^3\end{matrix}\right\} = ?$$

فصل پنجم توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

عنوان درس: لوگاریتم معمولی و لوگاریتم طبیعی

صفحهٔ کتاب (163)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم لوگاریتم‌های معمولی و طبیعی را بدانند. • لوگاریتم معمولی و طبیعی را از هم تفکیک کنند، سؤالهای آن‌ها را حل و گراف شان را رسم نمایند. • در وقت ضرورت از هرکدام استفاده کرده و مشکلات خود را حل نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	معلم مُحترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، شاگردان را متوجه قسمت ورودی سازد و بپرسد: • لوگاریتم را به کدام قاعده‌ها می شناسید؟ • آیا قاعده‌های لوگاریتم تنها 2 و 3 است یا اعداد دیگر هم قاعده‌های لوگاریتم شده می‌توانند؟ • آیا شما با لوگاریتم‌های طبیعی و معمولی آشنایی یا بلدیت دارید؟ کوشش شودکه جواب‌ها از شاگردان به دست بیاید در غیر آن معلم معلومات دهد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم در ابتدا تعریف لوگاریتم و اقسام(لوگاریتم معمولی و طبیعی) آن را توضیح کند، بعد لوگاریتم معمولی را که قاعدهٔ آن 10 است تعریف و معلومات لازم دهد و در مثالی به ارتباط آن 10^0 و 10^2 را پیدا کرده و لوگاریتم‌های اعداد دیگر را شاگردان هر کدام در کتابچه‌های خود دریافت کنند وگراف را در کتابچه‌های خود رسم کنند از کار شاگردان مراقبت به عمل آورده در صورت مشکلات کمک و رهنمایی نمایید.

- معلم در پایان چند شاگرد داوطلب را به نوبت بخواهد تا لوگاریتم اعداد متذکره را روی تخته پیدا کنند و همکاری نماید تا شاگردان گراف آن را به تخته رسم نمایند.

- معلم لوگاریتم طبیعی را که قاعدهٔ آن e است تعریف نماید و قیمت e را که عبارت از $e = 2.71828182...$ است روی تخته بنویسد.

- معلم شاگردان را به گروهای مناسب تقسیم کند تا گراف‌های تابع‌های $y = e^x$ و $y = e^{-x}$ را به قیمت‌های $x = -2,-1,0,1,2$ رسم نمایند بعد از انجام فعالیت‌ها نماینده‌های یک یا دو گروه را بخواهد تا فعالیت انجام دادهٔ گروه خود را به دیگران توضیح نمایند در صورت ضرورت معلم کمک و رهنمایی کند.

در پایان معلم محترم مثال صفحهٔ 160 کتاب درسی که مربوط به موضوع است به تخته حل کرده و گراف آن را رسم نماید تا شاگردان مفهوم هر دو موضوع را خوب درک کنند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم جهت تحکیم بهتر درس سؤال‌های $10^4, 10^5, \ln e^{-3}$ و $\ln e^4$ را به شاگردان بدهد تا لوگاریتم‌های اعداد مذکور را در کتابچه‌های خود پیدا کنند، بعد یک شاگرد داوطلب را بخواهد که آن را به تخته حل نماید و دیگر شاگردان حل کتابچه‌های خود را با حل تخته مقایسه کنند درصورت مشکلات معلم کمک و رهنمایی نماید.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم محترم برای اینکه از آموزش و یادگیری شاگردان مطمئن شود با پرسیدن سؤالهای زیر ایشان را ارزیابی کند:

- لوگاریتمی که قاعدهٔ آن e باشد به نام چی یاد می‌شود؟
- لوگاریتمی که قاعدهٔ آن 10 باشد به چی نام یاد می‌شود؟
- آیا عدد یک هم قاعدهٔ لوگاریتم شده می‌تواند؟

- معلم کوشش نماید که جواب‌ها را از شاگردان به طور شفاهی به دست بیاورد.

معلومات اضافی برای معلم

- معلم محترم فعالیت صفحهٔ 162 کتاب طور زیر حل می‌شود:

- قیمت تابع $f(x)=\log_2 x$ را برای قیمت‌های $\sqrt{2}$ ، $x=28$ محاسبه کنید.

حل:

$$f(\sqrt{2})=\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\log_2 2=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

$$f(28)=\log 28=\log 4\cdot 7=\log_2 4+\log_2 7=\log_2 2^2+\log_2 7$$
$$=2\cdot\log_2 2+\log_2 7=2\cdot 1+\log_2 7=2+\log_2 7$$

- معلم محترم فعالیت صفحهٔ 166 کتاب چنین حل می‌شود:

$$a)\ \ y=\ln\frac{1}{e^7}=\log_e\frac{1}{e^7}=\log_e e^{-7}=-7\log_e e=-7\cdot 1=-7$$

$$b)\ \ \log 0.0001=\log 10^{-4}=-4\cdot\log 10=-4\cdot 1=-4$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 166

لوگاریتم‌های زیر را محاسبه کنید:

$a)\log_e e^8$ $\qquad$ $b)\ln\frac{1}{e^{-3}}$

$c)\log 0.01$ $\qquad$ $d)\log\frac{1}{10^{-2}}$

حل:

$$a)\ \ \log_e e^8=8\cdot\log_e e=8$$

$$b)\ \ \ln\frac{1}{e^{-3}}=\ln e^3=3$$

$$c)\ \ \log 0.01=\log 10^{-2}=-2$$

$$d)\ \ \log\frac{1}{10^{-2}}=\log 10^2=2$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$$

فصل پنجم توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

عنوان درس: قوانین لوگاریتم

صفحهٔ کتاب (167)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • به مفهوم قوانین لوگاریتم بفهمند. • با تطبیق قوانین لوگاریتم سؤالها را حل کنند. • در وقت ضرورت از قوانین لوگاریتمی استفاده کرده به خود اعتماد پیدا می کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	معلم مُحترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، شاگردان را متوجه قسمت ورودی کتاب سازد و سؤالهای زیر را بپرسد: • قانون طاقت‌ها در عملیهٔ ضرب، در صورتیکه قاعدهٔ مساوی داشته باشند از چه قرار است؟ • آیا به افادهٔ $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ بلدیت دارید؟ بیان کنید. - معلم کوشش کند که جوابها را از شاگردان به دست بیاورد، در صورت مشکلات کمک و رهنمایی نماید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 167 کتاب درسی را بعد از بحث و مذاکره در گروه‌های مربوط انجام دهند. در پایان فعالیت نماینده‌های یک یا دو گروه را به ترتیب بخواهد تا فعالیت انجام دادهٔ گروه خود را به دیگران توضیح و تشریح کنند معلم در صورت اشتباه و مشکلات کمک و رهنمایی نماید؛ سپس دو شاگرد را هدایت دهد که به نوبت قوانین اول و دوم را بخوانند و مفهوم آن را در مثال‌های داده شده به روی تخته حل و توضیح نمایند. اگر ضرورت باشد معلم رهنمایی کند.

- معلم قانون سوم(لوگاریتم حاصل ضرب دو یا چندین عدد) را بعد از توضیح مفهوم با سهم فعال شاگردان مرحله به مرحله ثبوت کند، معلم مثال اول صفحهٔ 168 کتاب درسی را به تخته حل و توضیح کند تا شاگردان مفهوم قانون مذکور را بفهمند.

- معلم هدایت دهد تا شاگردان فعالیت صفحهٔ 168 کتاب درسی را در گروه‌های شان در مشورت باهم با ارائه مثالهای عددی انجام دهند، در صورتیکه مشکلات داشته باشند، معلم با استفاده از معلومات اضافی حل و توضیح دهد.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم جهت تحکیم بهتر درس مثال دوم صفحهٔ 168 را روی تخته بنویسد و به شاگردان بگوید تا هر کدام در کتابچه‌های خود حل کنند، از کار و فعالیت شان مراقبت نماید در صورت مشکلات کمک کند. در پایان یک شاگرد داوطلب مثال متذکره را به تخته حل و دیگر شاگردان صورت حل خود را با حل روی تخته مقایسه نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم محترم برای اینکه از آموزش و یادگیری شاگردان مطمئن شود آنها را توسط سؤالهای زیر ارزیابی کند:

$\log_2 8 = ?$ $\qquad \log_{116} 1 = ?$ $\qquad \log_{10}(100 \cdot 5) = ?$

معلومات اضافی برای معلم

1) $\log(x+y) \neq \log_a x + \log_a y$

2) $\log(x \cdot y) \neq \log x \cdot \log y$

غلط بودن لوگاریتم افاده‌های فوق را توسط مثال نشان دهید.

1) $\log(10+100) \neq \log 10 + \log 100$

$\log 110 \neq 1+2 \quad \Rightarrow \quad 2.414 \neq 3$

2) $\log(10 \cdot 100) \neq \log 10 \cdot \log 100$

$\log(1000) \neq 1 \cdot 2$

$3 \neq 2$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 170

1- افاده های حاصل ضرب را به شکل حاصل جمع و افاده های حاصل جمع را به شکل حاصل ضرب بنویسید و در صورت امکان جواب نهایی را به دست آورید.

حل:

$a)\ \log_4(5x^2) = \log_4 5 + \log_4 x^2 = \log_4 5 + \log_4 x + \log_4 x$

$b)\ \log_{10}(10x^2 y) = \log_{10} 10 + \log_{10} x^2 + \log_{10} y = 1 + \log x + \log_{10} x + \log_{10} y$

$c)\ \log_{10} 5 + \log_{10} 20 = \log_{10}(5 \cdot 20) = \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$

$d)\ \log_{12} 36 + \log_{12} 4 = \log_{10}(36 \cdot 4) = \log_{12} 144 = \log_{12} 12^2 = \log_{12}(12 \cdot 12)$

$= \log_{12} 12 + \log_{12} 12 = 1 + 1 = 2$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$

$\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$

فصل پنجم توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

عنوان درس: قوانین لوگاریتم

صفحهٔ کتاب (168)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • به مفهوم قانون چهارم و پنجم لوگاریتم بفهمند. • سؤالهای مربوط قوانین فوق را حل کنند. • قوانین فوق را در حل مسائل به کار ببرند و از حل مسائل احساس خوشی کنند.
روش های تدریس	تشریحی، سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم مُحترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی تدریس، جهت تولید انگیزه، شاگردان را متوجه سؤالهای زیر بسازد: • قانون طاقت‌ها در عملیهٔ تقسیم برای قاعده‌های مساوی از چی قرار است؟ • آیا به افاده‌های $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$ و $\log x^n = n\log x$ آشنایی دارید؟ اگر جواب بلی است توضیح دهید. - معلم کوشش کند که جوابها را از شاگردان به دست بیاورد در صورت مشکلات همکاری نماید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم در صفحهٔ 168 کتاب درسی قانون چهارم لوگاریتم که(لوگاریتم حاصل تقسیم دو عدد است) توسط یک شاگرد به خوانش گرفته شود و کوشش شود که شاگرد مفهوم آن را به شکل فارمولی به روی تخته بنویسد، در غیر آن معلم مفهوم را توضیح و فارمول آن را روی تخته بنویسد و با سهم گیری فعال شاگردان آن را به تخته ثبوت کند.

- معلم دو شاگرد داوطلب را به نوبت بخواهد که مثال‌های اول و دوم را با تطبیق فارمول آن به تخته حل کنند در صورت مشکلات کمک و رهنمایی نماید.

به همین ترتیب قانون پنجم لوگاریتم که(لوگاریتم یک عد توان دار است) توسط یک شاگرد خوانده شود و مفهوم آن را بیان کند. در صورتی که شاگرد مشکل داشته باشد معلم مفهوم را بیان و شکل فارمولی آن را روی تخته بنویسد و فارمول $\log x^n = n \cdot \log x$ را با اشتراک فعال شاگردان قدم به قدم به اثبات برساند.

با استفاده از همین قانون لوگاریتم $\sqrt[n]{x}$ یعنی $\frac{1}{n} \cdot \log x$ را روی تخته بنویسد و مثال 1 را حل و توضیح نماید، تا شاگردان مفهوم درس را بفهمند و به کار ببرند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم جهت تحکیم و آموزش بهتر درس مثال(2) اخیر صفحۀ 169 را روی تخته بنویسد و به شاگردان بگوید بدون استفاده از کتاب در کتابچه‌های خود حل نمایند. بعد یک شاگرد داوطلب را بخواهد که سؤال را به تخته حل نماید دیگر شاگردان صورت حل خود را با حل تخته مقایسه کرده اشتباهات خود را اصلاح کنند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم محترم برای اینکه از آموزش و یادگیری شاگردان مطمئن شود سؤالهای زیر را سه شاگرد به نوبت روی تخته حل نمایند و یا تغییر شکل بدهند.

$$\log(\frac{A}{B}) = ? \qquad \log(A)^n = ? \qquad \log(\frac{100}{10}) = ?$$

معلومات اضافی برای معلم

- معلم محترم، فعالیت صفحۀ 170 کتاب درسی چنین حل می‌شود:

$$a)\ \log_3(\frac{1000}{12}) = \log_3(\frac{250}{3}) = \log_3 250 - \log_3 3 = \log_3 250 - 1$$

$$b)\ \log_2\sqrt{8} = \log_2(8)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_2{}^{2^3} = \frac{1}{2}\cdot 3\log_2 2 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

جواب به سؤال های تمرین صفحۀ 170

2- افاده‌های تقسیم دو عدد را به تفاضل و تفاضل را به تقسیم تبدیل کنید و در صورت امکان جواب نهایی را به دست آرید.

حل:

$$a)\ \log_7\frac{63}{49} = \log_7 63 - \log_7 49 = \log_7(7\cdot 9) - \log_7 7^2$$
$$= \log_7 7 + \log_7 9 - 2\cdot\log_7 7 = 1 + \log_7 9 - 2 = \log_7 9 - 1$$

$$b)\ \log\frac{125}{80} = \log 125 - \log 80 = \log 125 - \log(10\cdot 8)$$
$$= \log 125 - \log 10 - \log 8 = \log 125 - 1 - \log 8$$

$$c)\ \log_a(x^2 a) - \log_a x^2 = \log_a\frac{x^2\cdot a}{x^2} = \log_a a = 1$$

$$d)\ \log_{10}1000 - \log_{10}100 = \log_{10}\frac{1000}{100} = \log_{10}10 = 1$$

3- لوگاریتم های زیر را محاسبه کنید:

$$a)\ \log_{10}(0.0001) = \log_{10}\frac{1}{10000} = \log_{10}\frac{1}{10^4} = \log_{10}10^{-4} = -4\log_{10}10 = -4\cdot 1 = -4$$

$$b)\ \log_2(8)^{-\frac{1}{3}} = \log_2(2^3)^{\frac{2}{3}} = \log_2 2^{\frac{3}{3}} = \log_2 2 = 1$$

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

فصل پنجم توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

عنوان درس: تبدیل قاعدهٔ لوگاریتم

صفحهٔ کتاب (171)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • لوگاریتم یک عدد را به یک قاعدهٔ مشخص بشناسند. • به مفهوم قوانین ششم و هفتم بفهمند. • یک لوگاریتم را از یک قاعده به قاعدهٔ دیگر تبدیل نمایند. • با تبدیل قاعده‌ها احساس خوشی نموده و به خود اعتماد پیدا می‌کنند.
روش های تدریس	انفرادی، تشریحی، سؤال و جواب
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم مُحترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی تدریس، جهت تولید انگیزه شاگردان را متوجه قسمت ورودی ساخته بپرسد: • کی فرق 4^2 و 2^4 را گفته میتواند و حاصل‌های شان را دریافت می‌کند؟ • کی‌میتواند که افادهٔ $\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$ را پیدا کند؟ • آیا در لوگاریتم امکان تبدیل قاعده‌ها موجود است؟ - معلم کوشش کند که جوابها را از شاگردان به دست بیاورد در صورتی‌که شاگردان مشکلات داشته باشند معلم کمک و همکاری کند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم قانون ششم را که تبدیل قاعدهٔ لوگاریتم است با سهم فعال شاگردان مرحله به مرحله روی تخته ثبوت و توضیح دهد؛ سپس دو شاگرد را به نوبت بخواهد که مثال‌های اول و دوم را به تخته حل کنند در صورت مشکلات معلم کمک و رهنمایی نماید. به همین ترتیب قانون هفتم لوگاریتم که پیدا نمودن معکوس لوگاریتم یک عدد است برای شاگردان تعریف و فارمول آن را به تخته بنویسد.

- معلم ثبوت آن را هم با سهم گیری فعال شاگردان(به شیوهٔ سؤال و جواب) انجام دهد.

در پایان مثال مربوط موضوع را، یک شاگرد داوطلب به تخته حل کند تا شاگردان مطلب را بفهمند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم جهت تحکیم بخشیدن درس، فعالیت اخیر صفحهٔ 172 کتاب را که سؤالها اند به تخته بنویسد و شاگردان را بگوید که در کتابچه‌های خود حل نمایند، در صورت موجودیت مشکلات معلم آن را به تخته حل کند و شاگردان صورت حل خود را به آن مقایسه کنند(در معلومات اضافی حل شده است).

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم محترم برای اینکه از آموزش و یادگیری شاگردان مطمئن شود، شاگردان را توسط سؤالهای زیر با تطبیق فارمول $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$ ارزیابی نماید:

$$a)\ \log_{32} 2 = \frac{1}{\log_2 32} = \frac{1}{\log_2 2^5} = \frac{1}{5\cdot\log_2 2} = \frac{1}{5\cdot 1}$$

$$b)\ \log_{27}\sqrt{3} = \log_{27}(3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{27} 3 = \frac{1}{2\log_3 27} = \frac{1}{2\log_3 3^3} = \frac{1}{6\log_3 3} = \frac{1}{6\cdot 1} = \frac{1}{6}$$

معلومات اضافی برای معلم

- معلم محترم، فعالیتی که جهت تحکیم درس داده شده است چنین حل می‌شود:

$$a)\ \log_{64} 2 = \frac{1}{\log_2 64} = \frac{1}{\log_2 2^6} = \frac{1}{6\cdot\log_2 2} \Rightarrow \log_{64} 2 = \frac{1}{6\cdot 1} = \frac{1}{6}$$

$$b)\ \log_4\sqrt{256} = \log_4(256)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_4 4^4 = \frac{4}{2}\log_4 4 = 2\log_4 4 = 2\cdot 1 = 2$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 174

لوگاریتم های زیر را ساده سازید.

حل:

$$d)\ \log_{121} 14641 = \log_{(11)^2}(11)^4 = \frac{4}{2}\log_{11} 11 = 2\cdot 1 = 2$$

$$e)\ \ln x = 2.3026\cdot\log x = \ln 672000 = 2.3026\cdot\log 672000 = 2.3026\log 6.72\cdot 10^5$$
$$= 2.3026(\log 6.72 + \log(10^5)) = 2.3026(\log 6.72 + 5) = 2.3026\log 6.72 + 11.513$$

$$f)\ \ln 0.00927 = 2.3026\log 0.00927 = 2.3026\log(9.27\cdot 10^{-3}) = 2.3026\log 9.27 + 2.3026\log 10^{-3}$$
$$= 2.3026\log 9.27 - 6.9078$$

$$g)\ \ln 0.235 = 2.3026\log 0.235 = 2.3026\log(2.35)\cdot 10^{-1} = 2.3026\log 2.35 - 2.3026$$

فصل پنجم توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

عنوان درس: قوانین لوگاریتم

صفحهٔ کتاب (172)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • به مفهوم قانون هشتم لوگاریتم بفهمند. • سؤالهای مربوط قانون هشتم را حل کنند. • در وقت ضرورت از قانون مربوط استفاده نموده و احساس خوشی کنند.
روش های تدریس	کار انفرادی، کار گروهی، سؤال و جواب
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم مُحترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، جهت تولید انگیـزه شـاگردان را متوجـه سؤالهای ذیل سازد: • کی گفته میتواند لوگاریتم یک عدد طاقت‌دار مساوی به چیست؟ • کی قیمت لوگاریتمی $\sqrt{10}$ را پیدا کرده میتواند؟ • آیا با افادهٔ $\log_{a^n} x$ (یعنی قاعده توان دار باشد) آشنایی دارید؟ - معلم کوشش کند که جوابها را از شاگردان به دست بیاورد، در صورت مشکلات جواب هـر سؤال را بگوید و یاد آور شود که قیمت افادهٔ $\log_{a^n} x$ هم دریافت شده می‌تواند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم قیمت لوگارتمی قانون هشتم(افـادهٔ لوگـاریتمی کـه قاعـدهٔ آن دارای تـوان اسـت) را میتـوانیم دریافـت نماییم که عبارت است از معکوس توان قاعدهٔ ضرب قیمت لوگاریتمی آن عدد می‌باشد؛ یعنـی $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\cdot\log_a x$ بعد از توضیح مفهوم، ثبوت آن را مرحله به مرحله با سهم و اشتراک فعال شاگردان انجام دهد؛ سپس آن نتیجه را کـه ثبوت قانون فوق است تشریح کند.

- معلم دو شاگرد را بخواهد که مثالهای اول و دوم مربوط را به روی تخته حل کنند در صـورت مشـکلات کـمک و رهنمایی کند.

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نماید تا فعالیت صـفحهٔ 173 کتـاب درسـی را بعـد از بحـث و مـذاکره انجام دهند. بعد از انجام فعالیت نماینده‌هـای دو گـروه را بخواهـد کـه فعالیـت انجـام دادهٔ گـروه خـود را بـه دیگـران توضیح دهند در صورت مشکلات معلم کمک و رهنمایی کند.

- معلم محترم رابطه بین لوگاریتم معمولی و طبیعی را با استفاده از تبدیلی قاعده‌ها ثبوت کند، طوری‌که شاگردان هـم سهم فعال داشته باشند و به ارتباط آن مثال اول صفحهٔ 174 را نیز به تخته حل نماید.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم جهت تحکیم بخشیدن درس مثال دوم را به تخته بنویسد و به شاگردان بگوید که بدون استفاده از کتاب در کتابچه‌های خود حل نمایند؛ سپس یک شاگرد داوطلب را بخواهد تا روی تخته آن را حل و توضیح نماید و دیگر شاگردان صورت حل خود را مقایسه کنند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای اینکه معلم از آموزش و یادگیری شاگردان مطمئن شود؛ مانند مثالهای داده شده سؤالها را روی تخته بنویسد و شاگردان را بگوید که در کتابچه‌های خود حل کنند در صورت اشتباه کمک و رهنمایی کند تا نتیجهٔ مطلوب به دست آید.

معلومات اضافی برای معلم

- معلم محترم، سؤالهای فعالیت صفحهٔ 173 چنین حل می‌شود(به شکل لوگاریتم معکوس)

حل: $a)\ \log_3 6 = \log_3(2\cdot 3) = \log_3 2 + \log_3 3 = \log_3 2 + 1$ یا $a)\ \log_3 6 = \dfrac{1}{\log_6 3}$

$$b)\ \log_8 \sqrt[3]{4} = \log_8 (4)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_8 4 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\log_4 8} = \frac{1}{3\log_{2^2} 2^3} = \frac{1}{\frac{9}{2}\log_2 2}$$

$$= \frac{1}{\frac{9}{2}\cdot 1} = \frac{1}{\frac{9}{2}} = \frac{1}{1}\cdot\frac{2}{9} = \frac{2}{9}$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 174

لوگاریتم های زیر را ساده سازید.

حل:

$$a)\ \log_{\frac{1}{3}} 3^{-4} = \log_{3^{-1}} 3^{-4} = \frac{-4}{-1}\log_3 3 = \frac{4}{1}\cdot 1 = 4$$

$$b)\ \log_9 27 = \log_{3^2} 3^3 = \frac{3}{2}\log_3 3 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

$$c)\ \log_8 4 = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3}\log_2 2 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$$

$$\log_{10} 10 = 1$$
$$\log_{10} 100 = 2$$

فصل پنجم توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

عنوان درس: کرکترستیک و مانتیس

صفحهٔ کتاب (175)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم کرکترستیک و مانتیس را بفهمند. • در قیمت لوگاریتمی یک عدد کرکترستیک و مانتیس را تشخیص نمایند. • در وقت ضرورت، کرکترستیک و مانتیس را به کار ببرند.
روش های تدریس	کار انفرادی، کار گروهی، سؤال و جواب
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی تدریس، شاگردان را متوجه قسمت ورودی ساخته و بپرسد: • کی گفته میتواند که $\log_{10} 100 = ?, \log_{10} 1000 = ?$ و $\log_{10} 10000 = ?$ • بگوید که بین تعداد ارقام و قیمت‌های صحیح لوگاریتمی اعداد فوق چه رابطه یا فرق دیده می‌شود؟ - معلم کوشش کند که جوابها را از شاگردان به دست آورد، در صورت مشکلات فرق بین قیمت لوگاریتمی صحیح و تعداد ارقام یک عدد را به صورت مختصر تشریح کند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم نخست تعریف موضوع را توسط یک شاگرد طوری بخواند که تمام شاگردان بشنوند.

- معلم محترم در این قسمت معلومات دهد و بگوید که در قیمت‌های لوگاریتمی یک عدد دو قسمت دیده می‌شود که قسمت صحیح و قسمت اعشاری.

در حقیقت قیمت لوگاریتمی یک عدد عبارت از مجموع کرکترستیک و مانتیس است که قسمت صحیح آن کرکترستیک و قسمت اعشاری آن مانتیس می‌باشد.

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند و به آنها بگوید هر گروه جدول صفحهٔ 175 کتاب را تکمیل نموده و جاهای خالی جدول را توسط اعداد مناسب پر نماید. بعد از انجام فعالیت نماینده‌های دو گروه را بخواهد که کار انجام دادهٔ گروه خود را به دیگران توضیح و تشریح نمایند. در صورت اشتباه معلم کمک و همکاری نماید.

سپس سؤالهایی که به این ارتباط در صفحهٔ 176 کتاب است به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند و نتیجه را توضیح نماید.

در پایان روش علمی عدد نویسی(scientific notation) یک عدد را طوری که یک عدد را به شکل $N = a \cdot 10^n$ (در حالیکه $1 \le a < 10$ و n یک عدد تام است نوشته می‌توانیم) پوره معلومات دهد.

- معلم مثال 1 را که به این ارتباط بوده و دارای سه جزء می‌باشد به ترتیب حل و شاگردان را بفهماند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم جهت تحکیم و آموزش بهتر درس، مثال 2 را به تخته بنویسد و به شاگردان بگوید که بدون استفاده از کتاب در کتابچه‌های خود حل کنند در پایان یک شاگرد داوطلب را بخواهد که سؤال را به روی تخته حل کند در صورت اشتباه معلم کمک و رهنمایی نماید و دیگر شاگردان صورت حل خود را با حل روی تخته مقایسه کنند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم محترم برای اینکه از آموزش و یادگیری شاگردان خود را مطمئن سازد، مثال 3 صفحهٔ 177 کتاب را به تخته نوشته کند و هدایت دهد که شاگردان بدون استفاده از کتاب در کتابچه‌های خود حل کنند و همچنان کرکترستیک‌های اعداد 0.995,56.784,89.435 و 0.0789 را طور شفاهی از شاگردان بپرسد و آنها را ارزیابی کند.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 178

کرکترستیک لوگاریتم های زیر را شفاهی بگویید.

$a)\ \log 0.9560$ $\quad b)\ \log 956.0$ $\quad c)\ \log 9560$

$d)\ \log 0.0009560$ $\quad e)\ \log 3.875$ $\quad f)\ \log 2345$

حل:

a): کرکترستیک عدد کوچکتر از یک دارای علامهٔ منفی بوده و قیمت آن یکی بیشتر از تعداد صفرهای طرف راست علامهٔ اعشاری می‌باشد؛ طوریکه طرف راست علامهٔ اعشاری صفر وجود ندارد؛ پس کرکترستیک آن منفی است.

b): کرکترستیک اعداد خلاف صفر مساوی است به تعداد ارقام صحیح منفی یک.

c): دیده میشود که تعداد ارقام صحیح 4 است؛ پس کرکترستیک آن 3 می‌باشد.

d): در این جزء تعداد صفرهای طرف راست علامهٔ اعشاری سه است؛ پس اگر 1 با آن جمع شود 4 می‌شود، طوریکه عدد از 1 کوچک است؛ پس کرکترستیک 4- می‌باشد.

e): تعداد ارقام صحیح 1 است؛ اگر یک از آن کم شود؛ پس کرکترستیک آن صفر می‌شود.

f): طوری که تعداد ارقام صحیح چهار است، بنا بر آن کرکترستیک 3 می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{array}\right\}=?$$

فصل پنجم توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

عنوان درس: جدول لوگاریتم

صفحهٔ کتاب (179)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • در جدول لوگاریتم طریق پیدا کردن مانتیس را بفهمند. • از جدول لوگاریتمی استفاده کرده بتوانند و قیمت مانتیس اعداد را دریافت نمایند. • در وقت ضرورت در محاسبات لوگاریتمی از جدول استفاده کنند.
روش های تدریس	انفرادی، تشریحی، سؤال و جواب
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، شاگردان را متوجه قسمت ورودی ساخته و بپرسد: • در قیمت لوگاریتم یک عدد قسمت کرکترستیک را چطور دریافت کرده میتوانی؟ • آیا برای تعیین کردن قسمت مانتیس هم کدام طریقه وجود دارد؟ • کرکترستیک‌های هر کدام از اعداد 50.1,5.01,0.501 و 501 را تعیین کنید و بگویید که فرق‌های کرکترستیک در چیست؟ - کوشش نمایید که جوابها را از شاگردان به دست آورد، در صورت مشکلات معلم با استفاده از درس گذشته معلومات مختصر دهد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم قبل از اینکه شاگردان طریقهٔ دریافت مانتیس را بدانند در مورد قسمت‌های صحیح و اعشاری قیمت لوگاریتم یک عدد توضیحات بدهد؛ سپس طریق دریافت مانتیس را در مثال داده شدهٔ کتاب توضیح و تشریح کند.
جدولهای لوگاریتمی تهیه شده دارای ارقام مختلف اند؛ یعنی بعضی‌ها 7 رقم، بعضی 5 رقم، بعضی 4 رقم خانه‌های اعشاری دارند، که برای پیدا کردن مانتیسااز آن استفاده می‌شود. در جدول ستون و سطر تعیین شده با استفاده از سطر و ستون مانتیسا چنین تعیین میشود. در عدد مورد نظر که تقاطع سطر و ستون مربوط آن عدد مطابقت می‌کند مانتیسا گفته می‌شود، که این موضوع در کتاب درسی نیز توضیح و تشریح گردیده است. بعد از توضیحات فوق مثال مربوط آن را حل کنید در جدول عددی تقاطع سطر 76 و ستون 5 که عبارت از مانتیسا است نشان دهید.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم جهت تحکیم بخشیدن درس مثال‌های 2 و 3 صفحهٔ 180 کتاب درسی را به تخته بنویسد و شاگردان را بگوید که بدون استفاده از کتاب در کتابچه‌های خود حل کنند؛ سپس دو شاگرد را به نوبت بخواهد که سؤالهای

داده شده را روی تخته حل نمایند و دیگر شاگردان صورت حل خود را با حل روی تخته مقایسه کرده اشتباهات شان را اصلاح نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم محترم برای اینکه از آموزش و یادگیری شاگردان مطمئن شود هدایت دهد تا مثال چهارم کتاب را که دریافت قیمت لوگاریتمی است بدون استفاده از کتاب درسی در کابچه‌های خود کار کنند.

- معلم از کار وفعالیت شاگردان نظارت کند تا از فهم شان اطمینان پیدا کند در صورت مشکلات شاگردان کمک و رهنمایی شوند.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 182

1-کرکترستیک لوگاریتم اعداد زیر را طور شفاهی بگویید و ما نتیس آنها را روی جدول دریافت کنید.

$a)\ \log 222$ $\quad b)\ \log 0.921$

$c)\ \log 928$ $\quad d)\ \log 527$

$e)\log 0.024$ $\quad f)\ \log 2400$

$g)\ \log 0.00024$ $\quad h)\ \log 24$

حل:

a): کرکترستیک عبارت از 2 بوده و مانتیس آن از جدول دریافت می‌کنیم:

$$\log 222 = \log(2.22\cdot 10^2) = \log 2.22 + 2$$

اکنون مانتیس عدد 2.22 را در سطر 22 و ستون 2 دریافت می‌کنیم که تقاطع آنها با عدد 3464 مطابقت می‌کند، که در نتیجه:

$$\log 222 = \log 2.22 + 2 = 0.3464 + 2 = 2.3464$$

b): در جزء b کرکترستیک -1 است.

$$\log 0.921 = \log(9.21\cdot \mathbf{10}^{-1}) = \log 9.21$$

مانتیس عدد 9.21 در جدول عبارت از تقاطع ستون یک و سطر 92–ام است که مانتیس عبارت از عدد 9643 است؛ یعنی:

$$\log 0.921 = \log 9.21 - 1 = 0.9643 - 1 = \bar{1}.9643$$

c): درجزء c کرکترستیک عبارت از 2 است.

$$\log 928 = \log(9.28\cdot 10^2) = \log 9.28 + 2$$

در جدول لوگاریتم مانتیس عدد 9.28 عبارت از عددیست که از تقاطع ستون 8 و سطر 92–ام حاصل می‌شود و آن عبارت از 9675 است.

$$\log 928 = \log 9.28 + 2 = 0.9675 + 2 = 2.9675$$

d): در جزء d کرکترستیک عبارت 2 است.

$$\log 527 = \log(5.27 \cdot 10^2) = \log 5.27 + 2$$

مانتیس عدد 5.27 در جدول لوگارتمی عبارت از عددی است که از تقاطع ستون 7–ام و سطر 52–ام حاصل می‌شود است؛ یعنی:

$$\log 527 = \log(5.27 + 2) = 0.7218 + 2 = 2.7218$$

e): کرکترستیک جزء e عبارت از 2–است.

$$\log 0.024 = \log 2.4 \cdot 10^{-2} = \log 2.4 - 2$$

طوریکه مانتیس $\log 2.4 = 0.3802$ است؛ پس:

$$\log 0.024 = \log 2.4 - 2 = 0.3802 - 2 = \overline{2}.3802$$

f): کرکترستیک جزء f عبارت از 3 است.

$$\log 2400 = \log(2.4 \cdot 10^3) = \log 2.4 + 3$$

طوریکه $\log 2.4 = 0.3802$ است؛ پس:

$$\log 2400 = \log 2.4 + 2 = 0.3808 + 2 = 2.3802$$

g): کرکترستیک جزء g عبارت از 4– است.

$$\log 0.00024 = \log(2.4 \cdot 10^{-4}) = \log 2.4 - 4$$

از حل‌های جزء‌های e و f میدانیم که مانتیس $\log 2.4 = 0.3802$ است:

$$\log 0.00024 = \log 2.4 - 4 = 0.3802 - 4 = \overline{4}.3802$$

h): دیده می‌شود که کرکترستیک جزء h عبارت از 1 است.

$$\log 24 = \log(2.4 \cdot 10) = \log 2.4 + 1 = 0.3802 + 1 = 1.3802$$

2- قیمت لوگاریتم های زیر را به دست آرید.

$$a)\ \log(2.73)^3 \qquad , \qquad b)\ \log \sqrt[5]{0.0762}$$

حل:

$$a)\ \log(2.73)^3 = 3\log(2.73) = 3(0.4362) = 1.3086$$

$$b)\ \log \sqrt[5]{0.0762} = \log(0.0762)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\log(0.0762) = \frac{1}{5}\log(7.62 \cdot 10^{-2}) = \frac{1}{5}[\log 7.62 - 2]$$

$$= \frac{1}{5}[0.8820 - 2] = \frac{1}{5}[-1,118] = -0.2236 \pm 1 = \overline{1}.7764$$

فصل پنجم توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

$\log 481 = 2.6821$

$\log N = 1.6580$

$N = ?$

عنوان درس: انتی لوگاریتم

صفحۀ کتاب (183)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم انتی لوگاریتم را بفهمند. • از لوگاریتم داده شده، عدد مربوط را دریافت کنند. • در وقت ضرورت از عملیه‌های مربوط کار بگیرند و به خود اعتماد می‌کنند.
روش های تدریس	کار انفرادی، کار گروهی، سؤال و جواب
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، شاگردان را متوجه قسمت ورودی ساخته و بپرسد: • کی گفته میتواند در صورتیکه قیمت لوگاریتمی یک عدد را داشته باشیم آیا پیدا کردن عدد مربوط ممکن است(بلی) • از کدام قسمت قیمت لوگاریتمی یک عدد گفته میتوانیم که عدد چند رقمی است(از قسمت کرکترستیک) - معلم کوشش کند که جوابها را از شاگردان دریافت کند، در صورت مشکلات معلم معلومات مختصر داده و تدریس را آغاز نماید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم قبل از همه انتی لوگاریتم را بگوید؛ سپس با ارائه چنین مثال درس را تشریح و توضیح کند:

هر گاه $\log_{10} 20 = 1.30103$ باشد در این صورت عدد 1.30103 را لوگاریتم عدد 20 به قاعدۀ 10 می‌نامند، در حالی‌که عدد 20 انتی لوگاریتم عدد 1.30103 می‌باشد.

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند که هر کدام از گروه فعالیت صفحۀ 183 کتاب درسی را بعد از بحث و مذاکره انجام دهد.

- معلم از کار و فعالیت شاگردان مراقبت کند، در صورت مشکلات کمک و رهنمایی نماید. در پایان نماینده‌های دو گروه را بخواهد که به نوبت فعالیت انجام دادۀ گروه خود را روی تخته به دیگران توضیح و دیگر شاگردان اشتباه‌های خود را اصلاح کنند.

- معلم مثال 1 صفحۀ مذکور را به شیوۀ سؤال و جواب حل کند تا شاگردان در پیدا کردن انتی لوگاریتم مهارت حاصل نمایند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم جهت تحکیم بخشیدن درس مثالهای دوم و سوم را به تخته بنویسد هدایت دهد تا شاگردان بدون استفاده از کتاب، در کتابچه‌های خود حل نمایند، در صورت موجودیت مشکلات معلم به شیوهٔ سؤال و جواب مثالها را روی تخته حل و تشریح کند و شاگردان اشتباهات خود را اصلاح نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم محترم برای اینکه از آموزش و یادگیری شاگردان خود را مطمئن سازد، مثال چهارم کتاب درسی را روی تخته بنویسد، یک شاگرد داوطلب را بخواهد که سؤال را حل نماید و درس را ارزیابی کند.

جواب به سؤال های تمرین

انتی لوگاریتم‌های زیر را به دست آرید:

$a)\ anti\log(-5.0521)$ $\qquad b)\ anti\log 4.9479$

a): $anti\log(-5\ ,\ 0521)=N \ \Rightarrow\ \log N=-5\ ,\ 0521\ ,\ N=?$

چون کرکترستیک منفی است و مانتیس باید منفی نباشد؛ پس در اینصورت:

$$-5.0521\pm 1=-6+9479$$

پس قسمت مانتیس، لوگاریتم مذکور یعنی 0.9479 را در جدول دریافت می‌کنیم، که عبارت از 8.87 است، در نتیجه:

$$N=(8,87\cdot 10^{-6})=0.00000887 \ \Rightarrow\ N=0.00000887$$
$$\Rightarrow\ anti\log(-5,0521)=0.00000887$$

حل:

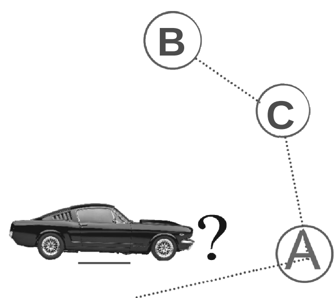
b): قسمت مانتیس یعنی 0.9479، لوگاریتم را در جدول لوگاریتم جستجو می‌کنیم در جدول می‌بینیم که در تقاطع کدام سطر و ستون مطابقت می‌کند، چون عدد 0.9479 به سطر 88 و ستون 7 قرار دارد؛ پس:

$$\log 8.87=0.9497$$

طوریکه در سؤال دیده می‌شود که کرکترستیک 4 است؛ پس تعداد ارقام صحیح آن 5 است:

در نتیجه $N=88700$ می‌باشد؛ یعنی:

$$anti\log 4.9479=88700$$



فصل پنجم توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

عنوان درس: انترپولیشن

صفحهٔ کتاب (185)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم انترپولیشن خطی را بفهمند. • لوگاریتم اعدادی را که در جدول وجود ندارند به طریقهٔ انترپولیشن پیدا کنند. • در وقت ضرورت از طریقهٔ انترپولیشن خطی به طور مناسب استفاده به عمل آورند و مشکل خود را حل نمایند.
روش های تدریس	کار انفرادی، کارگروهی، سؤال و جواب
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت، چارت ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، شاگردان را متوجه قسمت ورودی کتاب بسازد، چارت ورودی را پیشروی صنف بیاویزد و از شاگردان بپرسد: • هرگاه نقطهٔ C نقطهٔ وسطی A و B باشد. • موتر فاصله A و C را با عین سرعت ثابت در چقدر وقت طی میکند؟ • موتر فاصله C و B را با عین سرعت ثابت در چقدر وقت طی میکند؟ - معلم جوابها را از شاگردان به دست بیاورد، در غیر آن بگوید، با نصف نمودن زمان بین شهرهای A و B، وقت بین A و C و همچنان وقت بین C و B تعیین شده می‌تواند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند، تا فعالیت صفحهٔ 185 کتاب درسی را بعد از بحث و مذاکره انجام دهند و جوابها را دریافت کنند.

- معلم نماینده‌های یک یا دو گروه را بخواهد که فعالیت انجام دادهٔ گروه خود را به دیگران تشریح و توضیح نمایند در صورت مشکلات کمک و رهنمایی کند.

- معلم نتیجهٔ دریافت یک عدد نامعلوم را که بین دو عدد معلوم باشد با استفاده از عددهای معلوم به صورت مختصر تشریح کند.

- معلم تعریف انترپولیشن خطی را برای شاگردان بگوید تا بفهمند.

- معلم مثالی را که به ارتباط موضوع انترپولیشن است به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم جهت تحکیم بخشیدن درس مثال دوم کتاب را به تخته بنویسد و به شاگردان بگوید که بدون استفاده از کتاب درسی در کتابچه‌های خود حل کنند؛ سپس یک شاگرد داوطلب را بخواهد که سؤال را به تخته حل نماید، در صورت اشتباه، معلم کمک کند و دیگران صورت حل خود را با حل روی تخته مقایسه نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم محترم برای اینکه از آموزش و یادگیری شاگردان خود را مطمئن سازد.

مثال سوم کتاب درسی را به تخته بنویسد و یک شاگرد را بخواهد که به تخته حل کند.

به همین ترتیب چند سؤال را به شکل شفاهی بپرسد و شاگردان را ارزیابی کند.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 188

در سؤالات داده شده xرا دریافت کنید.

$a)\ x = \log 0.001582 \qquad b)\ x = \log 6.289$

حل a):

$$\log 0.001582 = \log(1.582 \cdot 10^{-3}) = \log 1.582 - 3$$

در جدول دیده می‌شود 1,582وجود ندارد در این صورت از انترپولیشن استفاده می نماییم، چون لوگاریتم اعداد 1,580 و 1,590 در جدول وجود دارد می‌دانیم که $1{,}590 > 1{,}582 > 1{,}580$ است. از جدول میدانیم که $\log 1.580 = 0.1987$ و $\log 1.590 = 0.2014$ است؛ پس:

$$\log 1.580 < \log 1.582 < \log 1.590$$
$$0.1987 < \log 1.582 < 0.2014$$

اگر $\log 1.582 = x$ نشان دهیم: $0.1987 < x < 0.2014$

اکنون تفاضل اعداد لوگاریتم‌ها را در نظر می گیریم:

	اعداد	لوگاریتم	
0.01	1.590	0.2014	0.0027
0.002	1.582	x	d
	1.580	0.1987	

$$\frac{d}{0.0027} = \frac{0.002}{0.01} \Rightarrow d = \frac{0.0027 \cdot 0.002}{0.01} = 0.00054$$

اکنون قیمت d را با مانتیس عدد کوچک جمع کرده که حاصل آن عبارت از قیمت لوگاریتم عدد مطلوب است:

$$0.1987 + d = 0.1987 + 0.00054 = 0.19924 \Rightarrow \log 0.001582 = 0.1992 \Rightarrow z = \log 0.001582$$
$$= \log 1.582 - 3 = 0.19924 - 3 \Rightarrow z = \log 0.001582 = -2.8008 \pm 1$$
$$= -3 + 0.1992 = \overline{3}.1992$$

حل b):

$x = \log 6.289$

لوگاریتم عدد 6.289 در جدول وجود ندارد؛ ولی لوگاریتم‌های اعداد 6.280 و 6.290 در جدول موجود است:

$\log 6.280 = 0.7980$

$\log 6.290 = 0.7987$

میدانیم که:

$6.280 < 6.289 < 6.290$

$\log 6.280 < \log 6.289 < \log 6.290$

$0.7980 < \log 6.289 < 0.7987$

هرگاه $x = \log 6.289$ باشد؛ پس: $0.7980 < x < 0.7987$

اعداد　　　　لوگاریتم

$$0.01\left[\begin{array}{ll} \quad 6.290 & \quad 0.7987 \\ 0.009\left[\begin{array}{l} 6.289 \\ 6.280 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{r} x \\ 0.7980 \end{array}\right] d \end{array}\right] 0.0007$$

$$0.7980 + d = 0.7980 + 0.00063 = 0.79863 \quad \Rightarrow \quad x = \log 6.289 = 0.7986$$

$$\log_2(x^2-1)=3$$

$$5^x=5^{\frac{1}{2}x-2}$$

فصل پنجم توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

عنوان درس: حل معادلات اکسپوننشیل و لوگاریتمی

صفحهٔ کتاب (189)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم معادلات اکسپوننشیل را بدانند. • معادلات اکسپوننشیل را حل کنند. • از طریقهٔ حل معادلات اکسپوننشیل در مسایل ریاضیکی استفاده کرده و به خود اعتماد پیدا کنند.
روش های تدریس	کار انفرادی، کار گروهی، سؤال و جواب
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت(چارت)
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی تدریس، شاگردان را متوجه قسمت ورودی کتاب ساخته معادله‌های قسمت ورودی را به تخته نوشته و بپرسد: • کی گفته میتواند که در معادلهٔ $2x+4=20$ مجهول چیست؟ • کی گفته میتواند که در معادلهٔ $5^x=5^{\frac{1}{2}x-2}$ مجهول چیست؟ • دو معادلهٔ فوق با یکدیگر چی فرق دارند؟ - معلم کوشش نماید که جوابها را از شاگردان به دست بیاورد، در صورت مشکلات به صورت مختصر بگوید که در هر دو معادلهٔ فوق x مجهول است.در معادلهٔ اول x به شکل یک عامل ضربی در معادلهٔ دوم x به هر دو طرف مساوات به شکل توان آمده است. در هر دو معادله برای x آن قیمت‌ها را دریافت می کنیم که تعادل معادله برقرار شود.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم معادلهٔ اکسپوننشیل $5^x=5^{\frac{1}{2}x-2}$ را به روی تخته نوشته کند و به شاگردان بگوید که در این ارتباط فکر کنند و از شاگردان بپرسد:

- به کدام قیمت‌های x هر دو طرف مساوات با یکدیگر مساوی می‌شوند؟
- چطور می‌توانیم در این نوع معادلات قیمت مجهول x را دریافت کنیم؟

ممکن بعضی از شاگردان جواب بگویند.

- معلم معادلات اکسپوننشیل را تعریف نماید و چنین بگوید:

برای حل معادلات اکسپوننشیل قاعده‌های هر دو طرف را با هم مساوی می‌سازیم. به اساس قوانین توان وقتی قاعده‌ها باهم مساوی باشند؛ پس توانهای آنها نیز باهم مساوی می‌شوند.

- معلم مثال اول صفحهٔ 189 کتاب را به تخته نوشته کند با سهم و مشارکت فعال شاگردان مرحله به مرحله آن را به تخته حل نماید تا شاگردان طریق مساوی ساختن قاعده‌ها را بفهمند و قاعده‌ها را مساوی بسازند در پایان قیمت توان مجهول را پیدا کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم جهت تحکیم بخشیدن درس معادلهٔ اکسپوننشیل $8^{3x-1} = 2^4$ را به روی تخته بنویسد و به شاگردان بگوید که در کتابچه‌های خود حل نمایند، بعد یک شاگرد داوطلب را بخواهد تا سؤال را حل نماید. در صورت مشکلات معلم کمک و رهنمایی کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم محترم برای اینکه از آموزش و یادگیری شاگردان خود را مطمئن سازد شاگردان را توسط معادلهٔ اکسپوننشیل $64^{x-2} = 16^{x+1}$ ارزیابی کند و بگوید که در کتابچه‌های خود حل نمایند در صورت مشکلات معلم محترم کمک و رهنمایی کند.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 192

از معادلات نمایی و لوگاریتمی زیر قیمت x را دریافت کنید.

$$a)\ (11)^{3x-1} = 11$$
$$b)\ 7^{2x-1} = 3^{x+3}$$

حل $a)$

$$a)\ (11)^{3x-1} = 11$$
$$(11)^{3x}\cdot 11^{-1} = 11 \Rightarrow \frac{(11)^{3x}}{11} = 11 \Rightarrow 11^{3x} = 121 \Rightarrow 11^{3x} = 11^2$$

چون قاعده‌ها باهم مساوی اند؛ پس توانها نیز باهم مساوی می‌باشند؛ بنا بر آن $3x = 2$ و $\boxed{x = \frac{2}{3}}$

حل $b)$

$$7^{2x-1} = 3^{x+3} \Rightarrow 7^{2x}\cdot 7^{-1} = 3^x\cdot 3^3 \Rightarrow \frac{7^{2x}}{7} = 27\cdot 3^x \Rightarrow 7^{2x} = 7\cdot 27\cdot 3^x \Rightarrow 7^{2x} = 189\cdot 3^x$$
$$\Rightarrow \log 7^{2x} = \log(189\cdot 3^x) \Rightarrow 2x\cdot\log 7 = \log 189 + \log 3^x$$
$$\Rightarrow 2x(0.8451) = 2.2765 + x\cdot\log 3$$
$$\Rightarrow 1.6902x = 2.2765 + x(0.4771) = 1.6902x - 0.4771x = 2.2765$$
$$\Rightarrow 1.2131x = 2.2765 \Rightarrow x = \frac{2.2765}{1.2131} \Rightarrow x = 1.8765$$

$\log_2(x^2-1)=3$

$5^x = 5^{\frac{1}{2}x-2}$

فصل پنجم توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

عنوان درس: معادلات لوگاریتمی

صفحهٔ کتاب (190)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • در معادله‌های لوگاریتمی مفهوم مجهول یا متحول را بدانند. • معادلات لوگاریتمی را حل کنند و طریقهٔ تبدیل معادلهٔ لوگاریتمی به اکسپوننشیل را به کار ببرند. • از حل معادلات لوگاریتمی در حل مسایل ریاضیکی کار بگیرند و مشکل خویش را حل نمایند.
روش های تدریس	کار انفرادی، کار گروهی، سؤال و جواب
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی تدریس، شاگردان را متوجه سؤالهای ذیل بسازد: • معادلهٔ $8^{3x-1}=2^4$ به نام کدام معادله یاد می‌شود؟ • معادلهٔ $\log_2(x^2-1)=3$ به نام کدام معادله یاد می‌شود؟ • کی شکل معادل معادلهٔ $\log_2(x^2-1)=3$ را نوشته کرده می تواند؟ - معلم محترم کوشش کند که جوابها را از شاگردان به دست بیاورد در صورت مشکلات معلم معادلهٔ اول را معادلهٔ اکسپوننشیل و دومی را معادلهٔ لو گاریتمی بگوید و شکل معادل معادلهٔ سومی عبارت از $x^2-1=2^3$ می‌باشد، برای آغاز درس یک انگیزهٔ خوب شده می‌تواند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم نخست افاده‌ها یا معادله‌های لوگاریتمی را که دارای مجهول اند به شاگردان تعریف و نیز شکل‌های معادلات لوگاریتمی را نشان دهد.

- معلم برای حل معادلهٔ لوگاریتمی، معادلهٔ لوگاریتمی(اکسپوننشیل) را نوشته و نظر به قوانین لوگاریتمی ساده به شیوهٔ سؤال و جواب آن را حل نماید که حل آن در حقیقت دریافت مجهول معادلهٔ لوگاریتمی می‌باشد.

- معلم دو شاگرد داوطلب را به نوبت بخواهد تا مثالهای دوم و سوم را روی تخته حل کنند در صورت مشکلات و اشتباهات، معلم محترم کمک و رهنمایی نماید.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم جهت تحکیم و آموزش بهتر درس، مثال چهارم کتاب را روی تخته بنویسد چون سؤال تا اندازه‌یی مشکل به نظر میرسد؛ پس معلم به شیوهٔ سؤال و جواب آن را روی تخته حل کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم جهت اطمینان از آموزش شاگردان به آنها هدایت دهد تا $\log(x^2+36)-2\log(-x)=1$ را در کتابچه‌های خود حل نمایند و قیمت x را به دست بیاورند.

$$\log(x^2+36)-2\log(-x)=1$$

$$\log(x^2+36)-\log(-x)^2=1$$

$$\log\frac{(x^2+36)}{(-x)^2}=1 \;\Rightarrow\; \log\frac{x^2+36}{x^2}=\log 10$$

$$\frac{x^2+36}{x^2}=10 \;\Rightarrow\; x^2+36=10x^2$$

$$9x^2=36 \;\Rightarrow\; x^2=\frac{36}{9}=4$$

$$\boxed{x=\pm 2}$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 192

معادله‌های لوگاریتمی زیر را حل کنید:

$c)\quad \log\sqrt{x}+3=4$

$d)\quad \log_5\frac{x-1}{x-2}=2$

حل c)

$$\log\sqrt{x}+3=4 \;\Rightarrow\; \log\sqrt{x}=4-3 \;\Rightarrow\; \log\sqrt{x}=1$$

$$\sqrt{x}=10^1 \;\Rightarrow\; \sqrt{x}=10 \;\Rightarrow\; (\sqrt{x})^2=10^2 \;\Rightarrow\; x=100$$

حل d)

$$\frac{x-1}{x-2}=5^2 \;\Rightarrow\; \frac{x-1}{x-2}=25$$

$$x-1=25(x-2) \;\Rightarrow\; x-1=25x-50$$

$$x-25x=-50+1 \;\Rightarrow\; -24x=-49$$

$$24x=49 \;\Rightarrow\; x=\frac{49}{24}$$

فصل پنجم توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

$$\left.\begin{array}{l}\frac{28.8}{78.8}\\ 3.17\cdot 88.2\end{array}\right\}=?$$

عنوان درس: استفاده از لوگاریتم در اجرای عملیه های ریاضی

صفحهٔ کتاب (193)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • طریقهٔ استفاده از لوگاریتم را در اجرای عملیه‌های ریاضی بدانند. • قانون لوگاریتمی هر عملیه را تشخیص، و عملیه‌های ریاضی را در مطابقت به قانون لوگاریتمی مربوط آن حل کنند. • با انجام این عملیه‌ها و تطبیق قوانین لوگاریتمی احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	کار انفرادی، کار گروهی، سؤال و جواب
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، شاگردان را متوجه قسمت ورودی ساخته و بپرسد: • آیا با استفاده از لوگاریتم در اعداد اعشاریه دار عملیه‌های ضرب و تقسیم را انجام داده می‌توانیم؟ • آیا به واسطهٔ لوگاریتم عملیه‌های جذر و توان را به آسانی انجام داده می‌توانیم؟ - معلم کوشش کند که جوابها را از شاگردان به دست بیاورد، در غیر آن خود جواب دهد و به آنها وانمود کند که بلی میتوانیم به واسطهٔ لوگاریتم عملیه‌های فوق را به آسانی انجام دهیم.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم نخست یک شاگرد را بخواهد که لوگاریتم قانون ضرب را به تخته بنویسد و مثال اول کتاب را به کمک حاصل ضرب لوگاریتم و با استفاده از جدول حل کند.

شاگرد به تخته کار می‌کند، دیده می‌شود که عدد مانتیس به دست آمده در جدول وجود ندارد؛ پس به کمک انترپولیشن با در نظرداشت مانتیس و اعداد خورد و بزرگ عدد مربوط را به دست بیاورد، شاگرد با در نظرداشت درس گذشته عملیه را انجام می‌دهد و مطلوب را به دست می‌آورد.

- معلم یک شاگرد دیگر را بخواهد تا قانون لوگاریتم تقسیم دو عدد را به تخته بنویسد و مانند ضرب تمام مراحل قانون را در مثال مربوط انجام دهد.

- معلم با در نظر داشت تمام مراحل معلومات مختصر دهد تا شاگردان در عملیهٔ تقسیم کاربرد لوگاریتم را بدانند. به همین ترتیب شاگرد داوطلب سومی را بخواهد و به او هدایت دهد تا قانون لوگاریتم اعداد توان دار را به روی تخته

بنویسد و مثال مربوط این قانون را به روی تخته حل نماید. در صورت بروز مشکلات معلم شاگردان مذکور را در حل مثال کمک و رهنمایی کند.

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت‌های صفحهٔ 194 و 195 کتاب را که ضرب و تقسیم اند بعد از بحث و مذاکره انجام دهند.

- معلم نماینده‌های دو گروه را بخواهد که یکی آن قسمت ضرب و دیگرش قسمت تقسیم فعالیت گروه خود را توضیح کنند در صورت به میان آمدن مشکل در جریان حل عملیه مشکلات معلم کمک و رهنمایی کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم جهت تحکیم و آموزش بهتر درس فعالیت صفحهٔ 195 کتاب درسی را که یک عدد توان دار است روی تخته بنویسد و به شاگردان هدایت دهد تا آن را در کتابچه‌های خود حل نمایند؛ سپس یک شاگرد داوطلب را بخواهد که روی تخته فعالیت را انجام دهد و دیگر شاگردان اشتباهات خود را اصلاح کنند در صورت مشکلات معلم شاگردان را کمک و رهنمایی نماید.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم محترم برای این‌که از آموزش و یادگیری شاگردان مطمئن شود را با پرسیدن سؤالهای شفاهی زیر آن‌ها ارزیابی کند:

- آیا میتوانیم در ساده ساختن عملیهٔ ضرب از لوگاریتم کار بگیریم؟
- آیا برای ساده ساختن عملیهٔ تقسیم از لوگاریتم استفاده کرده می‌توانیم؟
- آیا توسط لوگاریتم محاسبهٔ اعداد توان دار را انجام داده می‌توانیم؟

- معلم کوشش کند که جوابها را از شاگردان به دست بیاورد.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 196

1- حاصل ضرب‌های زیر را با استفاده از لوگاریتم دریافت کنید.

$$0.097\cdot 7.78=?$$

حل:

$$\log 0.097\cdot 7.78=\log 0.097+\log 7.78=\log(9.7\cdot 10^{-2})+\log 7.78$$
$$=\log 9.7+\log 7.78-2=0.9868+0.8910-2$$
$$1.8778-2=\pm 1-0.1222=-1+0.8778=\overline{1}.8778$$
$$anti\log(-0.1222)=anti\log(\overline{1}.8778)$$
$$anti\log(-1)=10^{-1}$$
$$anti\log(-0.1222)=7.55\cdot 10^{-1}=0.755=\overline{1}.8778$$
$$anti\log(-0.1222)=0.755\quad\Rightarrow\ 0.097\cdot 7.78=0.755$$

2- حاصل تقسیم‌های زیر را با استفاده از لوگاریتم دریافت کنید.

$$a)\frac{32.2}{25.1}=? \qquad b)\frac{8}{737}$$

حل a):

$$\log\frac{32.2}{25.1}=\log 32.2-\log 25.1=\log 3.22\cdot 10-\log 2.51\cdot 10$$
$$=\log 3.22+\log 10-\log 2.51-\log 10=\log 3.22+1-\log 2.51-1$$
$$=0.5079-0.3997=0.1082$$
$$anti\log 0.1082=1.28 \quad\Rightarrow\quad \frac{32.2}{25.1}=1.28$$

حل b):

$$\log\frac{8}{737}=\log 8-\log 737=\log 8-\log(7.37\cdot 10^2)$$
$$=\log 8-\log 7.37-2=\log 0.9031-0.8675-2=0.0356-2$$
$$anti\log(0.0356-2)=(1.09\cdot 10^{-2})=0.0109 \quad\Rightarrow\quad \frac{8}{737}=0.0109$$

3- با استفاده از لوگاریتم $(964)^{\frac{2}{3}}$ را ساده سازید.

حل:

$$(964)^{\frac{2}{3}}=?$$
$$\log(964)^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\log 964=\frac{2}{3}\log(9.64\cdot 10^2)=\frac{2}{3}\log 9.64+\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\cdot 0.9841+\frac{4}{3}$$
$$=0.6560+1.3333=1.9893=0.9893+1$$
$$anti\log 1.9893=9.76\cdot 10=97.6 \quad\Rightarrow\quad (964)^{\frac{2}{3}}=97.6$$

حل تمرینات عمومی فصل پنجم(6 ساعت درسی)

سؤالهای زیر را به دقت خوانده برای هر سؤال چهار جواب داده شده است جواب درست را دریافت و دور آن را حلقه نمایید.

1- عدد لوگاریتمی $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{4})$ مساوی است به:

$a)\ 4$ $\quad$ (b) -4 $\quad$ $c)\ 3$ $\quad$ $d)\ -3$

2- در رابطهٔ $\log_b \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4}$ قیمت b عبارت است از:

$a)\ \frac{1}{4}$ $\quad$ (b) 81 $\quad$ $c)\ \sqrt{81}$ $\quad$ $d)\ -4$

3- قیمت افادهٔ $\log_3 81 - \log 0{,}01$ عبارت است از:

$a)\ 0$ $\quad$ $b)\ 4$ $\quad$ (c) 6 $\quad$ $d)\ 9$

4- قیمت x در معادلهٔ $\log 18 - \log 2x = \log 3$ مساوی است به:

$a)\ 2$ $\quad$ $b)\ 3$ $\quad$ $c)\ 4$ $\quad$ (d) 13.5

5- $\log_2 16$ عبارت است از:

(a) 4 $\quad$ $b)\ 3$ $\quad$ $c)\ 5$ $\quad$ $d)\ -4$

6- $\log_{\frac{1}{5}} 125$ عبارت است از:

$a)\ 3$ $\quad$ (b) -3 $\quad$ $c)\ 4$ $\quad$ $d)\ 5$

7- $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ عبارت است از:

$a)\ \frac{1}{2}$ $\quad$ $b)\ -\frac{1}{2}$ $\quad$ (c) 1 $\quad$ $d)\ -1$

8- قیمت x در معادلهٔ $3^{x-1} = 9$ عبارت است از:

$a)\ x=-3$ $\quad$ $b)\ x=9$ $\quad$ $c)\ x=-9$ $\quad$ (d) $x=3$

9- مشخصهٔ $\log 234{,}21$ عبارت است از:

$a)\ 0$ $\quad$ $b)\ 1$ $\quad$ (c) 2 $\quad$ $d)\ 3$

10- معکوس لوگاریتم یک عدد مساویست به:

$a)\ \log_a m = \frac{1}{\log_a m}$ $\quad$ $b)\ \log_a m \frac{1}{\log_a m}$ $\quad$ (c) $\log_a m = -\frac{1}{\log_a m}$ $\quad$ $d)$ هیچکدام

سؤالات زیر را حل کنید.

1- در معادلات زیر قیمت x را دریافت کنید.

$a)\ 3^x = 3^{3x+2}$ $\quad$ $b)\ 3^{2x} = 9^{4x-1}$

$c)\ \log_3(x+2) = 2\log_3 9$ $\quad$ $d)\ 16^{x+1} = 64^{x-2}$

$e)\ 15^{2x-1} = 7^{x+1}$ $\quad$ $f)\ \log\sqrt{x+1} = 1 - \frac{1}{2}\log x$

$g)\ \log(4x-3) = 2 - \log 20$ $\quad$ $h)\ \log_5(x-1) - \log_5(x-2) = \log_5 2$

حل a):

$$3^x = 3^{3x+2} \Rightarrow 3x+2 = x \Rightarrow 3x - x = -2 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

حل b):

$$3^{2x} = 9^{4x-1} \Rightarrow 3^{2x} = (3^2)^{4x-1} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{2(4x-1)} \Rightarrow 2(4x-1) = 2x$$

$$8x - 2 = 2x \Rightarrow 8x - 2x = 2 \Rightarrow 6x = 2$$

$$x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

حل c):

$$\log_3(x+2) = 2\log_3 9$$

$$\log_3(x+2) = \log_3 9^2$$

$$x + 2 = 9^2 = 81$$

$$x = 81 - 2 = 79 \Rightarrow x = 79$$

حل d):

$$16^{x+1} = 64^{x-2}$$

$$((4)^2)^{x+1} = ((4)^3)^{x-2} \Rightarrow 4^{2(x+1)} = 4^{3(x-2)} \Rightarrow 2x+2 = 3x-6 \Rightarrow 8 = x \Rightarrow x = 8$$

حل e):

$$(15)^{2x-1} = 7^{x+1} \Rightarrow \log(15)^{2x-1} = \log 7^{x+1} \Rightarrow (2x-1)\log 15 = (x+1)\log 7$$

$$\Rightarrow (2x-1)(1.1761) = (x+1)(0.8451) \Rightarrow 2.3522x - 1.1761 = 0.8451x + 0.8451$$

$$\Rightarrow 2.3522x - 0.8451x = 1.1761 + 0.8451 \Rightarrow 1.5071x = 2.0212 \Rightarrow x = \frac{2.0212}{1.5071}$$

حل f):

$$\log\sqrt{x+1} = 1 - \frac{1}{2}\log x$$

$$\log\sqrt{x+1} + \frac{1}{2}\log x = 1 \Rightarrow \log\sqrt{x+1} + \log x^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\log(\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x}) = 1 \Rightarrow \sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x} = 10^1$$

$$(x+1)\cdot x = 100 \Rightarrow x^2 + x - 100 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(1)(-100) = 1 + 400 = 401$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{401}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{401}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1+20.02}{2} = \frac{19.02}{2} = 9.51 \quad , \quad x_2 = \frac{-1-20.02}{2} = \frac{-21.02}{2} = --10.51$$

حل (g:

$$\log(4x-3)=2-\log 20 \quad\Rightarrow\quad \log(4x-3)+\log 20=2$$
$$\log[(4x-3)\cdot 20]=2 \quad\Rightarrow\quad 20(4x-3)=10^2$$
$$80x-60=100 \quad\Rightarrow\quad 80x=160 \quad\Rightarrow\quad x=2$$

حل (h:

$$\log_5(x-1)-\log_5(x-2)=\log_5 2 \quad\Rightarrow\quad \log_5\frac{x-1}{x-2}=\log_5 2$$
$$\frac{x-1}{x-2}=2 \quad\Rightarrow\quad x-1=2x-4$$
$$x-1-2x+4=0 \quad\Rightarrow\quad -x+3=0 \quad\Rightarrow\quad -x=-3 \quad\Rightarrow\quad x=3$$

2- افاده های لوگاریتمی زیر را با استفاده از قوانین لوگاریتم ساده سازید.

$$a)\log_3(12x^2)-\log_3(8x^3y^2)+\log_3(2xy^2)=?$$
$$b)\log_5(\frac{4ab}{x})+\log_5(\frac{x}{100ab})b=?$$
$$c)\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4^3\sqrt{2}}=?$$

حل:

$$a)\log_3(12x^2)-\log_3(8x^3y^2)+\log_3(2xy^2)=\log_3\frac{12x^2}{8x^3y^2}(2xy^2)=\log_3(\frac{24x^3y^2}{8x^3y^2})=\log_3 3=1$$
$$b)\log_5(\frac{4ab}{x})+\log_5(\frac{x}{100ab})b=\log_5\frac{4ab}{x}\cdot\frac{x\cdot b}{100ab}=\log_5(\frac{4ab^2x}{100abx})=\log_5\frac{b}{25}$$
$$=\log_5 b-\log_5 25=\log_5 b-\log_5 5^2=\log_5 b-2\log_5 5=\log_5 b-2$$
$$c)\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4^3\sqrt{2}}=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4^3\cdot 2^{\frac{1}{2}}}=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2^6\cdot 2^{\frac{1}{2}}}=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2^{\frac{13}{2}}}=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^{\frac{13}{4}}$$
$$=\frac{\frac{13}{4}}{\frac{1}{2}}\log_2 2=\frac{13}{4}\cdot\frac{2}{1}=\frac{13}{2}$$

3- لوگاریتم های زیر را محاسبه کنید.

$$a)\log_8\sqrt[3]{4}=? \qquad b)\log_3\frac{1}{243}=?$$
$$c)\log_{10}\sqrt[4]{100}=? \qquad d)\log(\frac{8}{\sqrt{128}})=? \qquad e)\ \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0{,}1}=?$$

حل (a:

$$\log_8\sqrt[3]{4}=\log_{2^3}2^{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{2}{3}}{3}\log_2 2=\frac{\frac{2}{3}}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

حل b):

$$\log_3 \frac{1}{243} = \log_3 1 - \log_3 - 243 = 0 - \log_3 3^5 = -\log_3 3^5 = -5\log_3 3 = -5\cdot 1 = 5$$

حل c):

$$\log_{10} \sqrt[4]{100} = \log_{10}(100)^{\frac{1}{4}} = \log_{10} 10^{\frac{2}{4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

حل d):

$$\log \frac{8}{\sqrt{128}} = \log 8 - \log\sqrt{128} = \log 8 - \log(128)^{\frac{1}{2}} = \log 8 - \frac{1}{2}\log 128 = \log 8 - \frac{1}{2}\log 1.28 + 2$$
$$= 0.9031 - 0.5(0.1072) + 2 = 0.9031 - 0.0536 + 2 = 0.8495 + 2 = 2.8495$$

حل e):

$$\log \frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = \log\sqrt[3]{10} - \log 0.1 = \frac{1}{3}\log 10 - \log 10^{-1} = \frac{1}{3}\cdot 1 - (-1)\log 10$$
$$= \frac{1}{3} + 1 = \frac{1+3}{3} = \frac{4}{3}$$

4- انتی لوگاریتم های زیر را دریافت کنید.

$a)$ 1.7300 $b)$ 0.8954 $c)$ 4.5682 $d)$ $\overline{2}.1987$

حل a):

$$anti\log 1.7300 = anti\log(0.7300 + 1) = 5.37\cdot 10 = 53.7$$
$$anti\log 1.7300 = 53.7 \quad \Rightarrow \quad \log 53.7 = 1.7300$$

حل b):

$$anti\log(0.8954)$$
$$anti\log 0.8954 = 7.86$$

حل c):

$$anti\log 4.5682 = anti\log(0.5682 + 4) = 3.7000\cdot 10^4 = 37000$$

حل d):

$$anti\log\overline{2}.1987 = anti\log(0.1987 - 2) = (1.58\cdot 10^{-2} = 0.0158$$
$$anti\log\overline{2}.1987 = 0.0158$$

5- لوگاریتم هر یک از اعداد زیر را دریافت کنید.

$a)$ 89500 $b)$ 91 $c)$ 65.3 $d)$ $\log 0.002$

حل a):

$$\log 89500 = \log(8.59\cdot 10^4) = \log 8.95 + 4$$
$$= 0.9518 + 4 = 4.9518$$

حل b):

$$\log 91 = \log(9.1\cdot 10) = \log 9.1 + 1 = 0.9590 + 1$$
$$= 1.9590$$

حل c):

$$\log 65.3 = \log 6.53\cdot 10 = \log 6.53 + 1$$
$$= 0.8149 + 1 = 1.8149$$

حل d):

$$\log 0.002 = \log(2.00\cdot 10^{-3}) = \log 2.00 - 3$$
$$= 0.3010 - 3 = \overline{3}.3010$$

6- به کمک لوگاریتم، حاصل ضرب اعداد زیر را محاسبه کنید.

$a)\quad 2.01\cdot 52.9 \qquad\qquad b)\quad (0.0062)(-34.8)$

حل a):

$$\log 2.01\cdot 52.9 = \log 2.01 + \log 52.9 = \log 2.01 + \log(5.29\cdot 10)$$
$$= \log 2.01 + \log 5.29 + 1$$
$$0.3032 + 0.7235 + 1 = 2.0267$$
$$anti\log 2.0267 = anti\log(0.0267 + 2) = 1.06\cdot 100 = 106 \quad\Rightarrow\quad 2.01\cdot 59.9 = 106$$

حل b)**:** چون حاصل ضرب اعداد در جزء b یک عدد منفی می‌شود و اعداد منفی قیمت لوگاریتمی ندارند، لذا از طریق لوگاریتم، یافتن حاصل ضرب آن نا ممکن است.

7- خارج قسمت های داده شدهٔ زیر را با استفاده از لوگاریتم دریافت کنید.

$a)\ 0.888 \div 256 \qquad\qquad b)\ 17.3 \div 7.47$

حل a):

$$\log\frac{0.888}{256} = \log 0.888 - \log 256 = \log 0.888 - \log(2.56\cdot 10^2) = \log 0.888 - \left[\log(2.56\cdot 10^2)\right]$$
$$= \log(8.88\cdot 10^{-1}) - \log 2.56 - 2 = \log 8.88 - 1 - \log 2.56 - 2$$
$$= \log 8.88 - \log 2.56 - 3 = 0.9484 - 0.4082 - 3$$
$$= 0.5402 - = \overline{3}.5402$$
$$anti\log(-2.4598) = anti\log(0.5402 - 3) = 3.47\cdot 10^{-3} = 0.00347$$
$$\Rightarrow\quad 0.888 \div 256 = 0.00347$$

حل b):

$$\log\frac{17.3}{7.47} = \log 17.3 - \log 7.47 = \log(1.73\cdot 10) - \log 7.47 = \log 1.73 - \log 7.47 + 1$$
$$= 0.2380 - 0.8733 + 1 = 0.3647.$$
$$anti\log 0.3647 = 2.32 \quad\Rightarrow\quad 17.3 \div 7.47 = 2.32$$

8- هر یک از افاده های زیر را به کمک لوگاریتم دریافت کنید.

$a)\ (7.42)^3 \qquad b)\ (-84.7)^2 \qquad c)\ \sqrt{418} \qquad d)\ \sqrt{0.21}$

حل a):

$$\log(7.42)^3 = 3\log 7.42 = 3(0.8704) = 2.6112$$
$$anti\log(2.6112) = anti\log(0.6112+2) = 4.09\cdot 100 = 409$$
$$\Rightarrow (7.42)^3 = 409$$

حل b):

$$\log(-84.7)^2 = 2\log(-84.7) = 2\log(-8.47\cdot 10) = 2\log(-8.47) + 2\log 10$$
$$= 2\log(-8.47) + 2$$

چون می‌دانیم هر عدد به توان جفت مساوی به یک عدد مثبت است، بدون در نظرداشت علامهٔ منفی عملیه‌های لوگاریتمی را انجام می‌دهیم که مانتیس عدد 8.47 عبارت از 0.9279 است؛ پس:

$$2(0.9279) + 2 = 1.8558 + 2 = 3.8558$$

مانتیس یعنی 0.8558 در جدول وجود ندارد و به طریقهٔ انترپولیشن حل می‌شود که موضوع بعدی می باشد.

حل c):

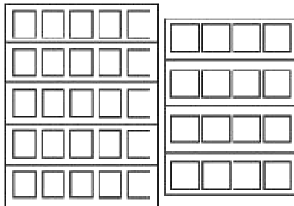
$$\log\sqrt{418} = \log(418)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log 418 = 0.5\log(4.18\cdot 10^2) = 0.5\log 4.18 + 0.5\cdot 2$$
$$= 0.5(0.6212) + 1 = 0.3106 + 1 = 1.3106$$
$$anti\log 1.3106 = anti\log(0.3106+1) = 2.05\cdot 10 = 20.5$$
$$\Rightarrow \sqrt{418} = 20.5$$

حل d):

$$\log\sqrt{0.21} = \log(0.21)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log 0.21 = 0.5\log(2.1\cdot 10^{-1}) = 0.5\log 2.1 + 0.5(-1)$$
$$= 0.5(0.3222 - 1) = 0.5(-0.6778) = -0.33890$$

در قیمت های لوگاریتمی قیمت مانتیسا باید مثبت باشد؛ پس با -0.33890 عدد مثبت یک و منفی یک را علاوه می کنیم:

$$-0.33890 + 1 - 1 = 0.6611 - 1 = \bar{1}.6611$$
$$anti\log(\bar{1}.6611) \approx 0.459 \quad \Rightarrow \sqrt{0.21} \approx 0.459$$



فصل ششم متریکس ها

عنوان درس: متریکس ها(Matrices)

صفحهٔ کتاب (205)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم متریکس ها را بدانند. • معادلات سه مجهولهٔ درجه یک را توسط متریکس حل کنند. • متناظر نقطهٔ M را نظر به محور x یا y پیدا کنند و همچنان ضرایب را در جدول نشان دهند. • با کاربرد آن به ریاضیات دلچسپی پیدا کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی، چارت متریکسهای صفحهٔ 206
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، چارت از قبل تهیه شده را پیشروی صنف بیاویزد و سؤال ورودی را از شاگردان بپرسد. شاگردان جواب می‌دهند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نماید تا فعالیت صفحهٔ 205 کتاب درسی را در گروه‌های خویش انجام دهند.
- معلم در جریان فعالیت از کار گروه‌ها دیدن نماید در صورت ضرورت آنها را کمک نماید.
- معلم در ختم کار گروهی، یک شاگرد را بخواهد تا فعالیت گروهی خود را به دیگران توضیح دهد، در صورت اشتباه، خود به شیوهٔ سؤال و جواب فعالیت شاگردان را توضیح و تصحیح کند.
- معلم تعریف متریکس را به شاگردان بگوید و سطرها و ستون‌های متریکس‌های B, A و C صفحهٔ 206 کتاب درسی را در حالیکه چارت‌های آنها را پیشروی صنف می آویزد به شاگردان معرفی کند.
- معلم از شاگردان بپرسد که مرتبه یا درجهٔ متریکس چیست؟ اگر شاگردی جواب داد خوب، در غیر آن درجهٔ متریکس را نیز به شاگردان معرفی کند.
- معلم متریکسهای B, A C, و D فعالیت صفحهٔ 207 کتاب را به شاگردی بدهد تا در کتابچه‌های خویش درجهٔ آنها را تعیین کنند. در اخیر شاگرد روی تخته فعالیت خویش را به دیگران توضیح دهد در صورت اشتباه شاگرد دیگری روی تخته درجهٔ متریکسها را تعیین کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

معلم برای تحکیم درس مثال صفحهٔ 207 کتاب درسی را به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم غرض اطمینان از آموزش شاگردان سؤالهای زیر را بپرسد:

1. ماتریکس چیست؟ یک شاگرد تعریف کند.
2. یک شاگرد مرتبهٔ متریکس $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ را بنویسد.

معلومات اضافی برای معلم

متریکس A به واسطهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ یا $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ نمایش داده می‌شود و اگر مرتبهٔ آن معلوم باشد به شکل $[a_{ij}]$ یا $\left(a_{ij}\right)$ آن را می‌نویسیم.

آشکار است که متریکس مرتبه $m\times n$ به تعداد $m\cdot n$ عنصر دارد.

مثال: یک متریکس که 12 عنصر داشته باشد چند ترتیب ممکنه دارد؟

حل: طوریکه متریکس$m\times n$ به تعداد $m\cdot n$ عنصر دارد؛ بنا بر آن یک متریکس که 12 عنصر داشته باشد تمام جوره‌های مرتب آن را طور زیر به دست می‌آوریم، که حاصل ضرب آن‌ها 12 می‌شود.

$$(1,12),\ (12,1),\ (2,6),\ (6,2),\ (3,4),\ (4,3)$$

پس مرتبهٔ ممکنهٔ متریکس مذکور 3×4 , 4×3 , 2×6 , 6×2 , 12×1 , 1×12 است که به این ترتیب فکتورهای طرف چپ تعداد سطرها و فکتورهای طرف راست تعداد ستونها را نشان میدهد.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 208

1 – مرتبهٔ متریکس های زیر را بنویسید.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

حل: میدانیم که مرتبهٔ یک متریکس را به شکل $m\times n$ نشان میدهند، طوریکه m تعداد سطر و n تعداد ستون را وانمود می کند.

$$A_{m\times n}=A_{3\times3} \qquad , \qquad B_{m\times n}=B_{2\times3}$$

2 – متریکس های زیرا را به شکل جدول مستطیلی بنویسید.

$$a)\ (a_{ij})_{3\times3}=(2i+3j)_{3\times3} \qquad b)\ (a_{ij})_{2\times3}=(\frac{i}{j})_{2\times3}$$

حل a**):** حالت عمومی متریکس $(a_{ij})_{3\times3}$ را می‌نویسیم و می‌دانیم که i جای عنصر را در سطر و j جای عنصر را در ستون متریکس مشخص می سازد؛ پس:

$$(a_{ij})_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (2i+3j)_{3\times3}$$

a_{11} , $i=1$, $j=1 \Rightarrow 2i+3j=2+3=5$

a_{12} , $i=1$, $j=2 \Rightarrow 2i+3j=2+6=8$

a_{13} , $i=1$, $j=3 \Rightarrow 2i+3j=2+9=11$

a_{21} , $i=2$, $j=1 \Rightarrow 2i+3j=4+3=7$

a_{22} , $i=2$, $j=2 \Rightarrow 2i+3j=4+6=10$

a_{23} , $i=2$, $j=3 \Rightarrow 2i+3j=4+9=13$

a_{31} , $i=3$, $j=1 \Rightarrow 2i+3j=6+3=9$

a_{32} , $i=3$, $j=2 \Rightarrow 2i+3j=6+6=12$

a_{33} , $i=3$, $j=3 \Rightarrow 2i+3j=6+9=15$

$$(a_{ij})_{3\times3} = (2i+3j)_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

حل b)**:**

$$(a_{ij})_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = (\frac{i}{j})_{3\times3}$$

a_{11} , $i=1$, $j=1 \Rightarrow \frac{i}{j}=\frac{1}{1}=1$

a_{12} , $i=1$, $j=2 \Rightarrow \frac{i}{j}=\frac{1}{2}$

a_{13} , $i=1$, $j=3 \Rightarrow \frac{i}{j}=\frac{1}{3}$

a_{21} , $i=2$, $j=1 \Rightarrow \frac{i}{j}=2$

a_{22} , $i=2$, $j=2 \Rightarrow \frac{i}{j}=\frac{2}{2}=1$

a_{23} , $i=2$, $j=3 \Rightarrow \frac{i}{j}=\frac{2}{3}$

a_{31} , $i=3$, $j=1 \Rightarrow \frac{i}{j}=\frac{3}{1}=3$

a_{32} , $i=3$, $j=2 \Rightarrow \frac{i}{j}=\frac{3}{2}$

a_{33} , $i=3$, $j=3 \Rightarrow \frac{i}{j}=\frac{3}{3}=1$

$$(a_{ij})_{3\times3} = (\frac{i}{j})_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(4 \quad 5 \quad 6)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

فصل ششم متریکس ها

عنوان درس: انواع متریکس‌ها

صفحهٔ کتاب (209)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • انواع متریکسها را بشناسند. • متریکسها را از هم تشخیص دهند. • به اهمیت متریکسها در زنده‌گی پی ببرند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیت های مقدماتی، سؤال ورودی را از شاگردان بپرسد، شاگردان در زمینه تفکر میکنند. - شاگردان جزء اول سؤال ورودی را جواب می‌گویند و جواب جزء دوم آن بعد از اجرای فعالیت‌ها برای شاگردان روشن می‌شود.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم عنوان متریکسها را به ترتیب روی تخته بنویسد و از یک شاگرد بخواهد تا نمونهٔ هر متریکس را روی تخته بنویسد، در صورت داشتن مشکل معلم شاگردان را رهنمایی کند.
- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 211 کتاب درسی را طور مشورتی انجام دهند در ختم کار گروهی، نمایندهٔ یک گروه را بخواهد تا فعالیت گروهی خویش را روی تخته به دیگران توضیح دهد. هرگاه توضیحات موصوف قناعت شاگردان را فراهم نکند، شاگرد داوطلب دیگری به توضیح فعالیت انجام شده بپردازد.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم غرض تحکیم بخشیدن درس جزء a و b تمرین صفحهٔ 212 را به شکل سؤال و جواب توسط شاگردان روی تخته حل کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم جهت اطمینان خویش از فراگیری شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. یک شاگرد انواع متریکسها را روی تخته بنویسد.
2. یک شاگرد را بخواهد تا قطرهای اصلی و فرعی یک متریکس را روی تخته بنویسید و معرفی کند.
3. یک شاگر جزء c تمرین صفحهٔ 212 را حل کند، یعنی نام و مرتبهٔ آن را مشخص کند.

معلومات اضافی برای معلم

حاصل جمع دو متریکس قطری باز هم یک متریکس قطری می‌باشد.

ثبوت: طوریکه تمام عناصر یک متریکس قطری بدون قطر اصلی صفرها اند؛ بنا بر آن فرض می کنیم که $A=(a_{ii})$ و $B=(b_{ii})$ متریکسهای قطری باشند، در این حالت به آسانی دیده می‌شود که:

$$C = A+B = (a_{ii}+b_{ii}) = ((a+b)_{ii}) = (c_{ii}) \ \Rightarrow\ C=(c_{ii})$$

مثال: هرگاه $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ متریکسهای قطری باشند:

$$A+B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1&0+0&0+0\\0+0&4+3&0+0\\0+0&0+0&6+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&7&0\\0&0&11\end{pmatrix}$$

در نتیجه به ملاحظه میرسد که $A+B$ نیز یک متریکس قطری می‌باشد.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 212

متریکس های زیر را در نظر گرفته مرتبه و نام های مربوط آن‌را مشخص کنید.

$$a)\ A=\begin{pmatrix}3&4&-5\\1&-2&3\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad b)\ B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad c)\ C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$d)\ D=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\qquad e)\ E=\begin{pmatrix}5&-6&7&8\end{pmatrix}\qquad f)\ F=\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}$$

$$g)\ G=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\\0\end{pmatrix}\qquad h)\ H=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&0\end{pmatrix}$$

حل a): مرتبهٔ متریکس جزء a ، $m\times n=3\times3$ بوده، متریکس مربعی می‌باشد.

حل b): مرتبهٔ متریکس جزء b ، $O_{m\times n}=O_{3\times3}$ بوده، متریکس صفری می‌باشد.

حل c): مرتبهٔ متریکس جزء c ، $m\times n=3\times3$ بوده، متریکس واحد می‌باشد.

حل d): مرتبهٔ متریکس جزء d ، $m\times n=3\times3$ بوده، متریکس سکالری می‌باشد.

حل e): مرتبهٔ متریکس جزء e ، $m\times n=1\times4$ بوده، متریکس سطری می‌باشد.

حل f): مرتبهٔ متریکس جزء f ، $m\times n=1\times2$ بوده، متریکس سطری می‌باشد.

حل g): مرتبهٔ متریکس جزء g ، $m\times n=4\times1$ بوده، متریکس ستونی می‌باشد.

حل h): مرتبهٔ متریکس جزء h ، $m\times n=2\times2$ بوده، متریکس مربعی می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} A+A= \\ A-A= \\ A+B= \\ A-B= \\ B+B= \\ B-B= \end{array}\right\} ?$$

فصل ششم متریکس ها

عنوان درس: جمع و تفریق متریکس‌ها

صفحهٔ کتاب (213)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • طریقهٔ جمع و تفریق متریکس‌ها را بدانند. • عملیهٔ جمع و تفریق متریکس‌ها را انجام دهند. • از اجرای موفقانهٔ عملیه‌های ریاضی احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت افاده‌های ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، چارت افاده‌های مربوط ورودی را پیشروی صنف بیاویزد و در مورد سؤال ورودی از شاگردان بپرسد، شاگردان فکر می‌کنند و جواب ارائه می‌دارند، در صورتی‌که جواب درست ارائه نتوانند، حل مثال اول جمع متریکس‌ها پاسخگوی سؤال بخش ورودی می‌باشد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم عنوان(جمع متریکس‌ها) را روی تخته بنویسد و بعد از توضیحات مختصر به حل مثال به شیوهٔ سؤال و جواب بپردازد.
- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نماید تا فعالیت صفحهٔ 213 را طور مشورتی در گروه‌های خویش انجام دهند، در اخیر به نمایندهٔ یک گروه وظیفه داده شود تا فعالیت گروهی خویش را به دیگران توضیح دهد، اگر نمایندهٔ گروه در جریان توضیح مرتکب اشتباهی شود معلم او را رهنمایی کند.
- معلم عنوان خواص جمع و تفریق متریکس‌ها را روی تخته بنویسد و به شیوهٔ سؤال و جواب جریان تدریس را پیش ببرد.
- معلم مثال2 صفحهٔ 214 را به صورت فعالیت انفرادی انجام دهد و از شاگردان بخواهد تا کتابهای خود را ببندند در اخیر فعالیت، شاگرد روی تخته فعالیت خود را به دیگران توضیح نماید.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم درس، فعالیت صفحهٔ 214 کتاب درسی را با مثال 3 به شکل سؤال و جواب(سهیم ساختن شاگردان) در صنف کار کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم غرض اطمینان خود از فراگیری دانش و مهارت شاگردان سؤالهای زیر را بپرسد:

1. از یک شاگرد بخواهد تا متریکس $A_{2\times2}$ را روی تخته بنویسد.
2. از یک شاگرد بخواهد تا متریکس $A_{2\times3}$ را روی تخته بنویسد.
3. یک شاگرد را بخواهد تا متریکسهای A و B مربوط جزء a تمرین صفحهٔ 214 را باهم جمع کند.

معلومات اضافی برای معلم:

حل فعالیت صفحهٔ 214 کتاب درسی:

فعالیت: توسط یک مثال نشان دهید که: $A-B \neq B-A$

حل: هرگاه $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ باشد؛ پس:

$$A-B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-0 & 2-7 & 4-9 \\ 5-8 & 8-10 & 7-4 \\ 6-3 & 3-5 & 9-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B-A=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0-1 & 7-2 & 9-4 \\ 8-5 & 10-8 & 4-7 \\ 3-6 & 5-3 & 6-9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A-B \neq B-A$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 214

در صورت امکان متریکس های زیر را جمع و تفریق نمایید.

$$a)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b)\ A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حل: دو متریکس وقتی جمع و تفریق می‌شوند که هر دو هم مرتبه باشند:

$$a)\ A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+3 & 2-1 & 3+0 \\ 4+0 & -1+(-1) & 0+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-3 & 2+1 & 3-0 \\ 4-0 & -1+1 & 0-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b)\ A+B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+2 & 2+2 \\ -1+1 & -1-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-2 & 2-2 \\ -1-1 & -1+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

c) : طوری‌که دیده می‌شود متریکسهای جزء c شکل مربعی را ندارند؛ بنا بر آن حاصل جمع و حاصل تفریق شان را نمی‌توان به دست آورد.

$$K \cdot A = K\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

فصل ششم متریکس ها

عنوان درس: ضرب یک متریکس در سکالر

صفحهٔ کتاب (215)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم ضرب یک متریکس در یک سکالر را بدانند. • یک متریکس را در سکال ضرب نموده بتوانند. • از آموزش دانش و مهارت فوق‌الذکر علاقمند علم ریاضی شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت افاده‌های ورودی، چارت‌های صفحهٔ 216(b, a و c)
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، چارت سؤال ورودی را پیشروی صنف بیاویزد و سؤال ورودی را از شاگردان بپرسد، شاگردان در مورد حل آن تفکر می‌کنند، اگر شاگردی جواب ارائه نماید خوب، در غیر آن بعد از اجرای فعالیت به جواب سؤال ورودی نایل می‌شویم.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند، تا فعالیت صفحهٔ 215 کتاب را به‌شکل مشورتی انجام دهند.
- معلم از جریان فعالیت گروه‌ها نظارت کند، گروه‌های فعال را تشویق و گروه‌هایی که مشکل دارند آنها را رهنمایی کند.
- معلم در ختم فعالیت نمایندهٔ یک گروه را بخواهد تا فعالیت گروهی خویش را به دیگران توضیح دهد در صورت داشتن مشکل، معلم رهنمایی نماید.
- معلم تعریف را که نتیجهٔ اجرای فعالیت‌ها است به شاگردان بگوید.
- معلم مثال صفحهٔ 215 کتاب درسی را به شیوهٔ سؤال و جواب توسط شاگردان در صنف حل کند.
- معلم عنوان(خواص ضرب متریکس در سکالر) صفحهٔ 216 را روی تخته بنویسد و چارت افاده‌های مربوط را پیشروی صنف بیاویزد و در مورد آن توضیحات لازم بدهد.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن موضوع، سه شاگرد را به نوبت بخواهد تا یک شاگرد $\alpha(\beta \cdot A)$ را شاگرد دوم $(\alpha\beta)A$ را و شاگرد سوم $\beta(\alpha \cdot A)$ را دریافت و در اخیر نتایج را مقایسه کنند، معلوم خواهد شد که $\alpha(\beta A) = (\alpha \cdot \beta)A = \beta(\alpha A)$ می‌باشد.

معلم اجازه ندهد تا شاگردان از کتاب استفاده کنند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم جهت اطمینان از آموزش شاگردان، سؤالهای زیر را بپرسد:

1. یک شاگرد قاعدهٔ ضرب یک متریکس در یک سکالر را بیان کند.
2. یک شاگرد تساوی‌های زیر را تکمیل کند:

$a)\ \ \alpha(A+\beta)=?$

$b)\ (\alpha+\beta)A=?$

$c)\ \ \alpha(\beta A)=?$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 216

1 – اگر $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\alpha=2$ و $\beta=1$ داده شده باشند 3 خاصیت ضرب متریکس در سکالر را نشان دهید.

حل:

$a)\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$$2\left[\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]=2\left[\begin{pmatrix}2-1 & 0+0\\ 1+1 & -1+0\end{pmatrix}\right]=2\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & -2\end{pmatrix}$$

$$\alpha A=2\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2 & 2\cdot 0\\ 2\cdot 1 & 2(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$\alpha B=2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(-1) & 2\cdot 0\\ 2\cdot 1 & 2\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\alpha A+\alpha B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-2 & 0+0\\ 2+2 & -2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & -2\end{pmatrix}$$

$b)\ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$$(\alpha+\beta)A=(2+1)\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2 & 3\cdot 0\\ 3\cdot 1 & 3(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}$$

$$\alpha A=2\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2 & 2\cdot 0\\ 2\cdot 1 & 2(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$\beta A=1\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2 & 1\cdot 0\\ 1\cdot 1 & 1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\alpha A+\beta A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2 & 0+0\\ 2+1 & -2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}$$

$c)\ \ \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

2 –اگر $A=\begin{pmatrix}5&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ و $K=3$ باشد $K\,A$ و $\frac{1}{K}A$ را دریافت کنید.

حل:

$$KA=3\begin{pmatrix}5&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot5&3\cdot1&3\cdot1\\3\cdot0&3\cdot1&3\cdot2\\3\cdot0&3\cdot0&3\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&3&3\\0&3&6\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{K}A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\cdot5&\frac{1}{3}\cdot1&\frac{1}{3}\cdot1\\\frac{1}{3}\cdot0&\frac{1}{3}\cdot1&\frac{1}{3}\cdot2\\\frac{1}{3}\cdot0&\frac{1}{3}\cdot0&\frac{1}{3}\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=?$$

فصل ششم متریکس ها

عنوان درس: ضرب دو متریکس

صفحهٔ کتاب (217)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • طریقهٔ ضرب دو متریکس را بفهمند. • دو متریکس داده شده را با هم ضرب نمایند. • از اجرای فعالیت‌ها و فراگیری موضوع حظ ببرند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت ورودی صفحهٔ 217
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، چارت ورودی را پیشروی صنف بیاویزد سؤال ورودی را از شاگردان بپرسد تا در مورد حل آن تفکر نمایند و جواب دهند، در غیر آن بعد از توضیحات و حل مثال به شیوهٔ سؤال و جواب، به جواب سؤال ورودی نایل خواهند شد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم بعد از توضیحات مختصر در مورد ضرب دو متریکس، مثال اول صفحهٔ 217 را به شیوهٔ سؤال و جواب(طوریکه توضیحات را در آن تطبیق کند) حل کند.
- معلم مثال 2 صفحهٔ 218 کتاب درسی را به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند.
- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند(کتابها بسته شوند) تا شاگردان در مشورت باهم مثال سوم صفحهٔ 218 کتاب را حل کنند، در اخیر نمایندهٔ یک گروه کار گروهی خویش را به دیگران توضیح دهد.
- معلم به یک شاگرد هدایت دهد تا فعالیت صفحهٔ 219 کتاب را روی تخته انجام دهد، همزمان عین فعالیت را شاگردان دیگر در کتابچه‌های خویش به شکل انفرادی حل کنند، در اخیر شاگرد روی تخته، توجه شاگردان را جلب و فعالیت خویش را به آن‌ها توضیح کند، معلم در صورت ضرورت شاگرد را رهنمایی کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم جهت تحکیم درس، مثال 4 صفحهٔ 219 کتاب را به شیوهٔ سؤال و جواب با(سهم گیری شاگردان) حل کند و این‌که در ضرب متریکسها به صورت عموم چرا خاصیت تبادله وی صدق نمی‌کند، به شاگردان بیان کند(جواب سؤال ورودی).

- معلم خواص ضرب متریکسها را به شاگردان با در نظرداشت افاده‌های آن یعنی:

$$A(B+C)=AB+AC\ ,\quad K(AB)=(KA)B=A(KB)$$
$$(A+B)C=AC+BC\ ,\quad IA=AI=A$$

توضیح دهد.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم جهت اطمینان خویش از آموزش شاگردان، سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. یک شاگرد بگوید، برای ضرب کردن دو متریکس کدام شرط ضروریست؟
2. یک شاگرد خواص ضرب متریکسها را بگوید.
3. هرگاه سه متریکس B, A و C داشته باشیم، یک شاگرد خاصیت توزیعی متریکسهای داده شده را بنویسد.

معلومات اضافی برای معلم

i): اگر n یکعدد طبیعی و A یک متریکس مربعی می‌باشد در این حالت $A^{n+1}=A$ می‌باشد و می‌گویند که A متریکس پریودیک(Periodic) می‌باشد که پریود آن n است، برای $n=1$ ، $A^2=A$ می‌شود در این حالت متریکس A را به نام متریکس Idempotent یاد می‌کنند.

ii): هرگاه A یک متریکس مربعی باشد و $n\in IN$ بنا بر آن $A^n=0$ می‌شود، در این‌حالت متریکس A را به نام Nilpotent یاد می‌کنند؛ طوری‌که اندکس آن n است یا به عبارت دیگر متریکس A را متریکس Nilpotent با اندکس n یاد می‌کنند.

مثال i): نشان دهید که $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ متریکس Idempotent است.

حل:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+2-4 & -4-6+8 & -8-8+12 \\ -2-3+4 & 2+9-8 & 4+12-12 \\ 2+2-3 & -2-6+6 & -4-8+9 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}=A\ \Rightarrow\ A^2=A$$

طوریکه $A^2=A$ به دست آمد؛ پس متریکس A یک متریکس Idempotent می‌باشد.

مثال ii): نشان دهید که $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ متریکس Nilpotent و اندکس آن 3 می‌باشد.

حل:

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5-6 & 1+2-3 & 3+6-9 \\ 5+10-12 & 5+4-6 & 15+12-18 \\ -2-5+6 & -2-2+3 & -6-6+9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 3+15-18 & 3+6-9 & 9+18-27 \\ -1-5+6 & -1-2+3 & -3-6+9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

طوریکه $A^3 = 0$ گردید؛ پس متریکس A با اندکس 3 ، Nilpotent است.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 220

حاصل ضرب متریکس های زیر را به دست آورید.

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ? \qquad b)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = ?$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$$

حل a**):** وقتی دو متریکس را باهم ضرب نموده می‌توانیم که تعداد ستون‌های متریکس اول مساوی به تعداد سطرهای متریکس دوم باشد، البته متریکس سوم که از ضرب متریکسهای اول و دوم حاصل می‌شود تعداد سطرهای آن مساوی به تعداد سطرهای متریکس اول و تعداد ستونهای آن برابر با تعداد ستون‌های متریکس دوم می‌باشد.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot5+1\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot1 \\ 2\cdot5+0\cdot0 & 2\cdot0+0\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & 0+1 \\ 10+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

حل جز b**):**

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot3+3\cdot4 \\ -1\cdot3+2\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+12 \\ -3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

حل جز c**):**

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(3\cdot(-2)+(-2)\cdot1+1\cdot1\right) = \left(-6-2+1\right) = \left(-7\right)$$

حل جز d**):**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-3)+3\cdot2 \\ 4\cdot(-3)+2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+6 \\ -12+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

فصل ششم متریکس ها

عنوان درس: ترانسپوز یک متریکس

صفحهٔ کتاب (221)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم ترانسپوز یک متریکس را بدانند. • متریکسهای متناظر را بشناسند. • با خواص ترانسپوز یک متریکس آشنا شوند. • ترانسپوز یک متریکس و همچنان متناظر یک متریکس را بنویسند. • از فراگیری مفاهیم فوق الذکر حظ ببرند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت سؤال ورودی، چارت مربوط به عنوان(تشخیص متریکسهای متناظر)
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، چارت سؤال ورودی را پیشروی صنف بیاویزد، و سؤال ورودی را از شاگردان بپرسد تا انگیزه خلق شود و توجه شاگردان بدان معطوف گردد. در صورتیکه شاگردان قادر به جواب گفتن نباشند، بعد از اجرای فعالیت، جواب سؤال ورودی را به دست می‌آورند.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروههای مناسب تقسیم نماید تا فعالیت صفحهٔ 221 کتاب را در مشورت باهم انجام دهند.
- معلم از جریان فعالیت گروه‌ها نظارت کند، گروه‌های فعال را تشویق و غیر فعال را رهنمایی کند. معلم در اخیر نمایندهٔ یک گروه را بخواهد تا فعالیت گروهی خویش را به دیگران توضیح کند، در صورت داشتن مشکل، معلم رهنمایی نماید.
- معلم عنوان(تشخیص متریکس‌های متناظر) را روی تخته بنویسد، چارت مربوط را پیشروی صنف بیاویزد و به نوبت از دو شاگرد بخواهد تا نخست قطرهای اصلی و فرعی را در آن معرفی؛ سپس حروف متناظر را نظر به قطر اصلی به همصنفان خود نشان دهند.
- معلم عنوان خواص ترانسپوز متریکس را روی تختهٔ صنف بنویسد و در مورد خواص آن با شریک ساختن شاگردان توضیحات دهد.
- معلم فعالیت صفحهٔ 222 کتاب را به یک شاگرد بدهد تا روی تخته حل و همزمان عین فعالیت را دیگر شاگردان در کتابچه‌های شان کار کنند، در ختم شاگرد روی تخته فعالیت خویش را به دیگران توضیح کند.

تحکیم درس (7) دقیقه

- معلم غرض تحکیم بخشیدن و وضاحت بیشتر موضوع، مثال صفحهٔ 222 کتاب را به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای اطمینان از آموزش شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. ترانسپوز یک متریکس چیست؟
2. یک شاگرد روی تختهٔ صنف یک متریکس متناظر را به ارقام بنویسد.
3. هر کدام از خاصیتهای ترانسپوز یک متریکس را یک شاگرد روی تخته بنویسد.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 222

1- متریکس های A و B را درنظر گرفته متریکس های ترانسپوز آن را دریافت کنید.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}0 & 4 & -2\\ 4 & 5 & 3\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}_{3\times3}$$

حل:

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 5 & 3\end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B^T=\begin{pmatrix}0 & 4 & -2\\ 4 & 5 & 3\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}_{3\times3}$$

2 – درمتریکس های فوق برای عدد حقیقی 3، صحت خاصیت چهارم را نشان دهید.

حل:

$$(\alpha A)^T=\alpha A^T \quad , \quad \alpha\in IR$$

$$(\alpha A)^T=\left[3\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}\right]^T=\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\ 0 & 3 & 15\\ 0 & 6 & 9\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 6 & 3 & 6\\ 9 & 15 & 9\end{pmatrix}$$

$$\alpha A^T=3\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}^T=3\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 6 & 3 & 6\\ 9 & 15 & 9\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (3A)^T=3A^T$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

$-cb$ ad

فصل ششم متریکس ها

عنوان درس: دیترمینانت

صفحۀ کتاب (223)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم دیترمینانت را بدانند. • سؤالهای مربوط دیترمینانت را حل نمایند. • از حل سؤالها لذت ببرند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت مربوط سؤال ورودی، چارت مربوط محاسبۀ دیترمینانت متریکسهای 3×3
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی چارت سؤال ورودی را پیشروی صنف بیاویزد و از شاگردان بپرسد: • کی میتواند یک متریکس مربعی را طوری تعیین کند که $ad-cb=0$ شود؟ - معلم بگذارد شاگردان در مورد حل سؤال ورودی تفکر کنند، در صورتیکه موفق به اینکار نگردیدند. معلم طوری ارقام مربوط قطر اصلی را تعیین کند که حاصل ضرب هر دو عین عدد شود؛ مانند: $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 7\cdot5-5\cdot7=35-35=0$

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم بعد از توضیحات در مورد تعریف(دیترمینانت متریکس A) عنوان محاسبۀ دیترمینانت متریکسهای 2×2 را روی تخته بنویسد و مثال مربوط را به شیوۀ سؤال و جواب حل کند.
- معلم فعالیت صفحۀ 223 را به شکل گروهی توسط شاگردان کار نماید.
- معلم عنوان(محاسبۀ دیترمینانت متریکسهای 3×3) را روی تخته بنویسد و مراحل حل آن را با استفاده از چارت مربوط پیش ببرد و شاگردان را در جریان پیشبرد مراحل، سهیم سازد.
- معلم مثال صفحۀ 225 کتاب را به شیوۀ سؤال و جواب در صنف حل کند.
- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند. فعالیت صفحۀ مذکور را به شاگردان بدهد تا در مشورت باهم انجام دهند.
- معلم مثال 2 صفحۀ 226 را به شیوۀ سؤال و جواب در صنف حل کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم غرض تحکیم بخشیدن درس، فعالیت صفحهٔ 226 را به شیوهٔ انفرادی در صنف کار کند(شیوهٔ انفرادی، شیوه-یی است که معلم محترم به آن از قبل آشنایی دارد.)

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم جهت اطمینان از فراگیری دانش و مهارت شاگردان سؤالهای زیر را از شاگردان بپرسد:

1. یک شاگرد دیترمینانت متریکس 3×3 را روی تخته بنویسد.
2. یک شاگرد در مورد حل دیترمینانت به روش سیروس توضیحات بدهد.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 226

1- مقدار دیترمنانت های زیر را به شکل مختصر محاسبه کنید.

$$a)\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix},\quad b)\begin{vmatrix}5 & -2\\ 3 & 7\end{vmatrix},\quad c)\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 6\end{vmatrix},\quad d)\begin{vmatrix}0 & 4 & 2\\ -5 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 5\end{vmatrix}$$

حل:

$$a)\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 0=4-0=4$$

$$b)\begin{vmatrix}5 & -2\\ 3 & 7\end{vmatrix}=5\cdot 7-(-2)\cdot 3=35+6=41$$

$$c)\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 6\end{vmatrix}=-1(1\cdot 6-3\cdot 5)=-1(6-15)=-1(-9)=9\ \dots\ I$$

$$\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 6\end{vmatrix}=-1(2\cdot 6-1\cdot 3)=-(12-3)=-9\ \dots\ II$$

$$\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 6\end{vmatrix}=0(2\cdot 5-1\cdot 1)=0(10-1)=0\cdot 9=0\ \dots\ III$$

$$I+II+III=9-9+0=0$$

$$d)\begin{vmatrix}0 & 4 & 2\\ -5 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 5\end{vmatrix}=0(5-3)=0\cdot 2=0\ \dots\ I$$

$$\begin{vmatrix}0 & 4 & 2\\ -5 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 5\end{vmatrix}=-(-25-6)\cdot 4=-(-31)4=124\ \dots\ II$$

$$\begin{vmatrix}0 & 4 & 2\\ -5 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 5\end{vmatrix}=(-5-2)\cdot 2=(-7)\cdot 2=-14\ \dots\ III$$

$$I+II+III=0+124-14=110$$

2- مقدار دیترمنانت های زیر را به طریق ساروس محاسبه کنید.

$$a)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

حل:

$$a)\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 5 & 6 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 7 & -4 & 1 \end{array}\right| = (42+0-6)-(-48+0-35)=36+83=119$$

$$b)\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 7 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right| = (-3+14-30)-(-3+14-30)=-19+19=0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

فصل ششم متریکس ها

عنوان درس: خواص دیترمینانت

صفحهٔ کتاب (227)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • خواص دیترمینانت را بفهمند. • از خواص دیترمینانت در حل مسائل استفاده کنند. • از فراگیری دانش و مهارت در موضوع، شادمان شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت سؤال ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، چارت ورودی را پیشروی صنف بیاویزد و سؤال ورودی را از شاگردان بپرسد تا انگیزهٔ تولید و شاگردان در مورد موضوع به تفکر وادار شوند. درصورتیکه ایشان به ارائه جواب سؤال مذکور موفق نشوند با حل مثال 1 صفحهٔ 228 به جواب سؤال ورودی نایل خواهند شد.

5) فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند، تا فعالیت صفحهٔ 227 کتاب را در مشورت باهم انجام دهند.
- معلم در جریان فعالیت از کار گروهی شاگردان نظارت کند و در ضمن گروه‌های فعال را تشویق و گروه-های ضعیف را رهنمایی کند. در اخیر معلم نمایندهٔ یک گروه را بخواهد تا کار گروهی خویش را به دیگران توضیح دهد، در صورت اشتباه معلم همکاری نماید.
- معلم بعد از اجرای فعالیت فوق، خواص دیترمینانت را برای شاگردان توضیح کند و خاصیت اول صفحهٔ 227 را به شکل انفرادی توسط شاگردان انجام دهد تا تحقق خاصیت را طور عملی مشاهده کنند.
- معلم مثال 1 را به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند که حل آن جواب سؤال ورودی را به نمایش می‌گذارد.
- معلم مثال 2 صفحهٔ 228 کتاب را فکتور بگیرد و از شاگردان بپرسد که آیا از کدام سطر ویا ستون دیگر این سؤال می‌توان فکتور گرفت یا نه؟ شاگردان استدلال کنند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم جهت تحکیم یافتن درس قیمت دیترمینانت جزء a صفحهٔ 228 کتاب را با سهم گیری شاگردان در صنف حل کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم غرض اطمینان از فهم و مهارت کسب شدهٔ شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. یک شاگرد خواص 1 و 2 دیترمینانت را بگوید.
2. یک شاگرد از دیترمینانت $|A|=\begin{vmatrix}1 & 5 & 4\\ 2 & 15 & 3\\ 3 & 25 & 7\end{vmatrix}$ فکتور بگیرد.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 228

به کمک خواص دیترمینانت قیمت دیترمینانت های زیر را به دست آورید.

$$a)\ \begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 6\end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 7 & 9 & 11\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix}3 & 5 & 8\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

حل a**):** چون تمام عناصر ستون اول دیترمینانت جزء a صفرها اند؛ پس دیترمینانت آن مسای به صفر می‌باشد.

حل b**):** از اینکه تمام عناصر سطر سوم دیترمینانت جزء b صفرها اند؛ بنابر آن دیترمینانت آن مساوی صفر می‌باشد.

حل c**):**

$$\begin{vmatrix}3 & 5 & 8\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1\cdot(3\cdot 4 - 0\cdot 5) = 12$$

یا به طریقهٔ دیگر:

$$\begin{vmatrix}3 & 5 & 8\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}3 & 5\\ 0 & 4\\ 0 & 0\end{matrix} = (12+0+0)-(0+0+0) = 12-0 = 12$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

فصل ششم متریکس ها

عنوان درس: معکوس ضربی متریکسهای 2×2

صفحهٔ کتاب (229)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم معکوس ضربی متریکس‌های 2×2 را بدانند. • معکوس ضربی متریکس‌های مذکور را دریافت نمایند. • از دریافت معکوس ضربی متریکسهای 2×2 خوشی احساس نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت سؤال ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، چارت سؤال ورودی را پیشروی صنف بیاویزد و سؤال ورودی را از شاگردان بپرسد تا ایشان فکر کنند و جواب دهند، در غیر آن بعد از انجام دادن فعالیت به جواب سؤال ورودی نایل خواهد شد.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند، تا فعالیت صفحهٔ 229 کتاب را در مشورت باهم انجام دهند.
- معلم در ختم فعالیت نمایندهٔ یک گروه را بخواهد تا کار گروهی، گروه خویش را به دیگران توضیح دهد، در صورت داشتن اشتباه، معلم رهنمایی کند.
- معلم نتیجهٔ فعالیت را که همانا جواب سؤال ورودی است و تعریف هم از آن به دست می‌آید به شاگردان بگوید.
- معلم مثال 1 صفحهٔ 229 کتاب را به شیوهٔ سؤال و جواب به شاگردان حل کند.
- معلم عنوان(متوصلهٔ یک متریکس) را روی تخته بنویسد و با سهم گیری شاگردان جریان درس را پیش ببرد.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس، مثال 1 صفحهٔ 230 کتاب را به شیوهٔ سؤال و جواب حل کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای حصول اطمینان از آموزش شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. یک شاگرد شرط معکوس پذیری یک متریکس را بگوید.
2. یک شاگرد بگوید که در صورت ضرب دو متریکس مربعی B, A کدام نوع متریکس به دست می‌آید؟
3. یک شاگرد بگوید که برای دریافت متریکس متوصلهٔ یک متریکس چی باید کرد؟

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 230

1- کدام یک از متریکس های زیر دارای معکوس اند؟

$$a)\ \ A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix} \qquad b)\ \ B=\begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$$

حل a)**:** زمانی یک متریکس معکوس دارد که:

- متریکس مربعی باشد.
- دیترمینانت مربوط آن خلاف صفر باشد.

$$A=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{vmatrix}=-10-(-10)=-10+10=0$$

چون دیترمینانت مربوطهٔ جزء a صفر است؛ بنابر آن معکوس ندارد.

حل b)**:**

$$|B|=\begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{vmatrix}=75-76=-1\neq 0$$

طوریکه دیده می‌شود دیترمینانت جزء b خلاف صفر است، بنابر آن متریکس جزء b، متریکس معکوس دارد و طور زیر حاصل می‌شود:

$$AdjB=\begin{pmatrix} 15 & -19 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}adjB=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 15 & -19 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix} 15 & -19 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} -15 & 19 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

2- معکوس ضربی متریکس های زیر را به دست آورده امتحان کنید.

$$1)\ \ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \ B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad 3)\ \ C=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

حل 1)**:**

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1-6=-5\neq 0$$

$$adjA=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adjA=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{5}+\frac{6}{5} & \frac{2}{5}-\frac{2}{5} \\ \frac{-3}{5}+\frac{3}{5} & \frac{6}{5}-\frac{1}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow AA^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حل 2):

$$|B|=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-3-2=-5\neq 0$$

$$adjB=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}adjB=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$BB^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}+\frac{2}{5} & \frac{-2}{5}+\frac{2}{5}\\ \frac{-3}{5}+\frac{3}{5} & \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{5} & 0\\ 0 & \frac{5}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

حل 3):

$$|C|=\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1+3=2\neq 0$$

$$adjC=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$C^{-1}=\frac{1}{|C|}adjC=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$CC^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

فصل ششم متریکس ها

$$X = A^{-1} \cdot B$$

عنوان درس: حل معادلات خطی با استفاده از معکوس متریکس

صفحهٔ کتاب (231)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • طریق حل سیستم معادلات خطی را با استفاده از معکوس متریکس بدانند. • سیستم معادلات خطی را با استفاده از معکوس متریکس حل نمایند. • از فراگیری دانش و مهارت فوق‌الذکر اعتماد به نفس پیدا کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت مربوطهٔ سؤال ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	معلم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی چارت ورودی را پیشروی صنف بیاویزد و سؤال ورودی را از شاگردان بپرسد تا شاگردان در مورد سؤال ورودی فکر کنند. ممکن شاگردان جواب ارائه نتوانند، اما فکر ایشان در موضوع متمرکز می‌شود و بعد از اجرای فعالیت و حل مثال 1 جواب به دست می‌آید و ذهن نشین شاگردان می‌شود.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 213 را در مشورت با هم اجرا نمایند.
- معلم از کار و فعالیت گروهها نظارت کند و گروه‌هایی که مشکل دارند، آنها را رهنمایی نماید. در اخیر نمایندهٔ یک گروه فعالیت، گروه خویش را به دیگران توضیح نماید.
- معلم مثال 1 صفحهٔ 231 را برای روشن شدن موضوع به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند.
- معلم مثال 2 صفحهٔ 232 کتاب را به یک شاگرد بدهد تا روی تخته حل کند.(در حالیکه کتابهای شاگردان بسته است) همزمان عین مثال را دیگر شاگردان در کتابچه‌های خویش حل کنند، در اخیر شاگرد روی تخته فعالیت خویش را به دیگران توضیح دهد در صورتیکه اشتباه موجود باشد، معلم یا کدام شاگرد داوطلب رهنمایی کند تا به حل درست مثال نایل آیند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

- معلم جهت تحکیم درس، مثال 3 صفحهٔ 233 کتاب را به شیوهٔ سؤال و جواب(مشارکتی) در صنف حل کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای مطمئن شدن از فراگیری شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. یک شاگرد بگوید که سیتسم معادله متشکل از چند معادله می‌باشد؟
2. یک شاگرد یک سیستم معادلات را روی تخته بنویسد.
3. یک شاگرد متریکس ضرایب، متریکس ستونی عدد ثابت سمت راست و همچنان متریکس ستونی اعداد مجهول سیستم معادلات مربوط سؤال شماره 2 را روی تخته بنویسد.

جواب به سؤال های تمرین صفحۀ 234

سیستم معادلات زیر را در نظر گرفته با استفاده از معکوس متریکس‌ها مجهول‌ها را به دست آورده و امتحان کنید.

$$a)\ \begin{cases}2x-y=1\\5x-2y=2\end{cases}\quad,\quad b)\ \begin{cases}3p-5q=7\\2p-4q=6\end{cases}\quad,\quad c)\ \begin{cases}a+b=11\\4a-b=9\end{cases}$$

حل a):

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\5&-2\end{pmatrix}\ ,\ \ B=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ ,\ \ X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}B$$

زمانی یک سیستم معادلات دارای حل می‌باشد که دیترمینانت آن خلاف صفر باشد.

$$|A|=\begin{vmatrix}2&-1\\5&-2\end{vmatrix}=-4+5=1\neq 0$$

چون دیترمینانت خلاف صفر است؛ پس سیستم معادلات دارای حل می‌باشند.

$$adjA=\begin{pmatrix}-2&1\\-5&2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adjA=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-2&1\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\-5&2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-2&1\\-5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+2\\-5+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ x=0\quad,\quad y=-1$$

$$b)\ \begin{cases}3p-5q=7\\2p-4q=6\end{cases}$$

حل b):

$$A=\begin{pmatrix}3&-5\\2&-4\end{pmatrix}\ ,\ \ B=\begin{pmatrix}7\\6\end{pmatrix}\quad,\ \ X=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B$$

$$|A|=\begin{vmatrix}3&-5\\2&-4\end{vmatrix}=-12+10=-2\neq 0$$

چون $|A| \neq 0$ است؛ پس سیستم دارای حل می‌باشد.

$$adjA = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14-15 \\ 7-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow p = -1 \ , \quad q = -2$$

$$c) \begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases}$$

حل c):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$$

چون $|A| \neq 0$ است؛ پس سیستم دارای حل است.

$$adjA = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} + \frac{9}{5} \\ \frac{44}{5} - \frac{9}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{5} \\ \frac{35}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 4 \ , \quad b = 7$$ یا $(a,b) = (4,7)$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$
$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$
$$z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

فصل ششم متریکس ها

عنوان درس: حل سیستم معادلات به طریقۀ کرامر(crammers rule)
صفحۀ کتاب (235)
وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • حل سیستم معادلات را به طریقۀ کرامر بدانند. • سیستم معادلات را به طریقۀ کرامر حل کنند. • از حل سیستم معادلات به طریقۀ کرامر حظ ببرند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت مربوطۀ سؤال ورودی و چارت سیستم معادلات سه مجهوله
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، چارت ورودی را پیشروی صنف بیاویزد و سؤال ورودی را جهت تولید انگیزه طرح کند تا شاگردان در مورد حل معادلات تفکر نمایند، در صورت عدم ارائه جواب، بعد از توضیحات جریان درس، به جواب سؤال ورودی نایل خواهند گردید.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

- معلم چارت سیستم معادلات را پیشروی صنف بیاویزد و از شاگردان بخواهد تا متریکس ضرایب آن یعنی A را روی تخته بنویسد. در صورت عدم توانایی شاگرد، معلم جریان درس را با سؤال و جواب پیش ببرد.
- معلم برای تحقق محاسبۀ $|A_x|$,$|A_y|$ و $|A_z|$ عوض اینکه مثال 1 را در مرحلۀ نخست کار می کند که به گفته‌های صفحۀ 236 در مورد محاسبۀ شان صدق نمیکند در قدم اول مثال 2 را(که مطابقت به گفته‌هایی در مورد محاسبۀ $|A_x|$,$|A_y|$ و $|A_z|$ دارد) به شیوۀ سؤال و جواب حل کند.
- معلم فعالیت صفحۀ 236 را در حالیکه شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم می‌کند به شکل گروهی توسط شاگردان انجام دهد، در ختم نمایندۀ یک گروه فعالیت گروه خویش را به دیگران توضیح دهد، در صورت داشتن مشکل معلم رهنمایی کند.
- معلم مثال $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ صفحۀ 236 کتاب را به شیوۀ سؤال و جواب در صنف حل کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس، از یک شاگرد بخواهد تا فعالیت صفحۀ 238 کتاب را روی تخته انجام دهد، همزمان عین فعالیت را دیگر شاگردان در کتابچه‌های خویش انجام دهند. در اخیر شاگرد روی تخته فعالیت خویش را به دیگران توضیح کند، در صورت داشتن اشتباه معلم و یا یک شاگرد داوطلب دیگر به تصحیح آن بپردازد.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای اطمینان از آموزش شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. یک شاگرد شکل عمومی(به حروف) یک معادلهٔ سه مجهوله را روی تخته بنویسد.
2. یک شاگرد ضرایب y,x و z را که در معادلهٔ عمومی نوشته شده است نشان دهد.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 238

1- حل سیستم معادلات زیر را درصورت امکان دریافت کنید.

$$a)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x+y-az=0 \\ ax+2y-z=0 \\ 2x+ay+2z=0 \end{cases}$$

حل a):

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}1$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix}=(2-2+1)-(-2-1-2)=1-(-5)=1+5=6\neq 0$$

طوریکه به ملاحظه میرسد $|A|=6\neq 0$ بوده؛ بنا برآن سیستم معادلهٔ فوق حل دارد:

$$|A_x|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}=(2-1+2)-(-1-1-4)=3-(-6)=3+6=9$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}=(-4-2+1)-(4-1-2)=-5-1=-6$$

$$|A_z|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix}=(-1+4+1)-(-2+2+1)=4-1=3$$

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2} \\ y&=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{-6}{6}=-1 \\ z&=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \end{aligned}\right\}\Rightarrow (x,y,z)=(\frac{3}{2},-1,\frac{1}{2})$$

حل b):

$$\begin{cases} x+y-az=0 \\ ax+2y-z=0 \\ 2x+ay+2z=0 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ a & 2 \\ 2 & a \end{matrix}=(4-2-a^3)-(-4a-a+2a)=2-a^3+3a$$

سیستم فوق زمانی دارای حل می‌باشد که $2+3a-a^3\neq 0$ باشد.

$$|A_x|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -a \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix}=0 \quad , \quad |A_y|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0 \quad , \quad |A_z|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{0}{|A|}=0 \quad , \quad y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{0}{|A|}=0 \quad , \quad z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{0}{|A|}=0$$

$$(x,y,z)=(0,0,0)$$

فصل ششم متریکس ها

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

عنوان درس: حل سیستم معادلات خطی به طریقه Gouse(حذفی)

صفحهٔ کتاب (239)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • حل سیستم معادلات را به طریقهٔ گوس بفهمند. • سیستم معادلات رابه طریقهٔ گوس حل نمایند. • از حل سیستم معادلات حظ ببرند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت مربوطهٔ سؤال ورودی(سیستم معادلات)
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، سؤال ورودی را مطرح کند تا شاگردان در موضوع عمیق شوند؛ زیرا وقتی‌که در نتیجهٔ حل مثال به جواب سؤال ورودی نایل آمدیم موضوع به حافظهٔ شاگردان باقی میماند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم مثال 1 صفحهٔ 239 کتاب را به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند.
- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 239 کتاب را به صورت مشورتی انجام دهند. در اخیر نمایندهٔ یک گروه، فعالیت گروه خویش را به دیگران توضیح دهد، در صورت اشتباه، معلم رهنمایی و اشتباه نماینده را رفع کند.
- معلم مثال 2 صفحهٔ 240 کتاب را با سهم گیری شاگردان در صنف حل کند.
- معلم از یک شاگرد بخواهد تا فعالیت صفحهٔ 240 کتاب را روی تخته انجام دهد. همزمان عین فعالیت را شاگردان دیگر، در کتابچه‌های خویش انجام دهند در اخیر شاگرد روی تخته فعالیت خویش را به دیگران توضیح دهد، اگر در اجرای فعالیت وی اشتباهی دیده شود معلم رهنمایی کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس مثال 3 صفحهٔ 241 کتاب را با سهم گیری شاگردان(شیوهٔ سؤال و جواب) در صنف حل کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

معلم غرض اطمینان از آموزش شاگردان، ایشان را طور زیر ارزیابی کند:

1. یک شاگرد در یک سیستم معادلات ضرایب مجهول‌ها و ثوابت را معرفی کند.
2. یک شاگرد حل سیستم معادله را از طریق حذف به صورت مختصر بیان کند.

معلومات اضافی برای معلم

$$\begin{cases} x_2+x_3=0 \\ x_1+x_3=2 \\ x_1+x_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_3\to R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1\to R_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$2x_3 = 2 \quad \Rightarrow \boxed{x_3 = 1}$$

$$-x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow -x_2 + 1 = 2 \Rightarrow -x_2 = 1 \Rightarrow \boxed{x_2 = -1}$$

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 242

سیستم معادلات زیر را به روش Gouse حل کنید.

$$a) \begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 2x + 4y - 10z = -2 \\ 3x + 9y - 21z = 0 \\ x + 5y - 12z = 1 \end{cases} \qquad c) \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ -3y = -6 \end{cases}$$

حل a):

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & | & -5 \\ 1 & 3 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3R_2\to R_2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & | & -5 \\ -3 & -9 & | & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2\to R_2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & | & -5 \\ 0 & -10 & | & -20 \end{pmatrix}$$

$$-10y = -20 \Rightarrow y = 2$$

$$3x - y = -5$$

$$3x - 2 = -5 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (x, y) = (-1, 2)$$

حل b):

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & -2 \\ 3 & 9 & -21 & 0 \\ 1 & 5 & -12 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_1\to R_1} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 10 & 2 \\ 3 & 9 & -21 & 0 \\ 1 & 5 & -12 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2\to R_2} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 10 & 2 \\ 1 & 5 & -11 & 2 \\ 1 & 5 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_3\to R_3} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 10 & 2 \\ 1 & 5 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_2+R_1\to R_2} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 10 & 2 \\ 0 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2R_2 + R_1 \longrightarrow R_2 \begin{pmatrix} -2 & -4 & 10 & 2 \\ 0 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$-z = -1 \Rightarrow \boxed{z = 1}$$

$$6y - 12z = 6 \Rightarrow 6y - 12\cdot 1 = 6 \Rightarrow 6y = 6 + 12 \Rightarrow 6y = 18 \Rightarrow \boxed{y = 3}$$

$$-2x - 4y + 10z = 2 \Rightarrow -2x - 4\cdot 3 + 10\cdot 1 = 2 \Rightarrow -2x - 12 + 10 = 2$$

$$-2x - 2 = 2 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

$$(x, y, z) = (-2, 3, 1)$$

حل c): این سیستم طور تقریب حل است؛ زیرا:

$$-3y = -6 \Rightarrow y = 2$$

$$x + 2y = 3$$

$$x + 4 = 3 \Rightarrow x = -1$$

$$(x, y) = (-1, 2)$$

حل عمومی تمرینات فصل ششم(7 ساعت درسی)

به سؤالات زیر چهار جواب داده شده است جواب درست را دریافت و دور آن را حلقه نمایید.

1- اگر $|A|=3$ باشد آنگاه $|A|^{-1}$ کدام است ؟

$a)\ \frac{1}{3}$ $\quad b)\ 9$ $\quad c)\ \frac{1}{9}$ $\quad d)\ 3$

2- اگر متریکس $\begin{pmatrix} 2m-3 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ معکوس پذیر باشد، آنگاه m کدام است ؟

$a)\ m=1\,,\frac{1}{2}$ $\quad b)\ m\neq 1$ $\quad c)\ m=0$ $\quad$ (d) $m\neq 1\,,\frac{1}{2}$

3- اگر $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ باشد، آنگاه متریکس x که رابطهٔ $Ax=A^{-1}$ را صدق کند. کدام است؟

$a)\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$ $\quad$ (b) $\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{pmatrix}$ $\quad c)\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -25 & -16 \end{pmatrix}$ $\quad d)\begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -25 & -12 \end{pmatrix}$

4- تغییر یافتهٔ خط $y=2x$ تحت متریکس $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ کدام است ؟

a - محور y ها $\quad$ b - محور xها $\quad$ (c -) $y+2x=0$ $\quad$ d - $y=0$

5- در دیترمینانت $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ قیمت x کدام است ؟

$a)\ x=1,2$ $\quad b)\ x=3,1$ $\quad c)\ x=\frac{1}{2},3$ $\quad$ (d) $x=3,2$

6- در دیترمینانت $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ حاصل را به دست آورید.

$a)\ 29$ $\quad$ (b) 32 $\quad c)\ 19$ $\quad d)\ 9$

سؤالات زیر را حل کنید.

1- فرض کنید $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ داده شده باشند. مطلوب است محاسبهٔ

$a)\ 3A-2B \quad , \quad b)-4A+3B$

حل a):

$$3A-2B=3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+10 & 9-2 \\ 0-4 & 12-6 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 13 & 7 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

حل b):

$$-4A+3B=-4\begin{pmatrix}1&3\\0&4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-5&1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-12\\0&-16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-15&3\\6&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4-15&-12+3\\0+6&-16+9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-19&-9\\6&-7\end{pmatrix}$$

2- فرض کنید $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&0&3\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\\2&-1\end{pmatrix}$ داده شده باشند مطلوب است محاسبهٔ AB BA آیا $AB=BA$ است.

حل:

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0+4&0+0-2\\-2+0+6&0+0-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-2\\4&-3\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0&0+0&4+0\\-1-3&0+0&-2+9\\2+1&0+0&4-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&4\\-4&0&7\\3&0&1\end{pmatrix}$$

بنا بر آن گفته می‌شود که: $AB\neq BA$

3- متریکس های $A=\begin{pmatrix}2&4\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4\\-2&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2&4\\0&-1\end{pmatrix}$ را درنظر گرفته خاصیت اشتراکی ، خاصیت توزیع پذیری ضرب متریکس را برای سه متریکس فوق نشان دهید.

حل:

$$A(B+C)=AB+AC$$

$$\begin{pmatrix}2&4\\0&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}3&4\\-2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&4\\0&-1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2&4\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&8\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-8&16+4\\0-2&0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&20\\-2&1\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}2&4\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-8&8+8\\0-2&0+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&16\\-2&2\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}2&4\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4+0&8-4\\0+0&0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&4\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$AB+AC=\begin{pmatrix}-2&16\\-2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&4\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&20\\-2&1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ A(B+C)=AB+AC$$

$$(A+B)C=AC+BC$$

$$\left[\begin{pmatrix}2&4\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&4\\-2&2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}-2&4\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&8\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10+0&20-8\\4+0&-8-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&12\\4&-11\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}2&4\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4+0&8-4\\0+0&0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&4\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$BC=\begin{pmatrix}3&4\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6+0&12-4\\4+0&-8-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&8\\4&-10\end{pmatrix}$$

$$AC+BC=\begin{pmatrix}-4&4\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6&8\\4&-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&12\\4&-11\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ (A+B)C=AC+BC$$

حال ضرب متریکسها را برای سه متریکس در نظر می گیریم:

$$ABC=\left[\begin{pmatrix}2&4\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\-2&2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}-2&4\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-8&8+8\\0-2&0+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&16\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+0&-8-16\\4+0&-8-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-24\\4&-10\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2&-12\\2&-5\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1&-6\\1&-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

4- دیترمینانت $A=\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&0&2\\2&1&1\end{vmatrix}$ را به شکل مختصر محاسبه کنید.

حل:

$$\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&0&2\\2&1&1\end{vmatrix}=1(0-2)=-2\ \ldots\ I$$

$$\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&0&2\\2&1&1\end{vmatrix}=-2(1-4)=-2(-3)=6\ \ldots\ II$$

$$\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&0&2\\2&1&1\end{vmatrix}=-1(1-0)=-1\ \ldots\ III$$

$$I+II+III=-2+6-1=3\ \Rightarrow\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&0&2\\2&1&1\end{vmatrix}=3$$

5- معکوس متریکس $M=\begin{pmatrix}2&-5\\3&-9\end{pmatrix}$ را به دست آورید.

حل:

$$adjM=\begin{pmatrix}-9&5\\-3&2\end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix}2&-5\\3&-9\end{vmatrix}=-18+15=-3\neq 0$$

چون $|M|\neq 0$ است؛ پس متریکس معکوس پذیر است.

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} = adjM$$

$$M^{-1} = \frac{1}{-3} adjM = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

6- سیستم معادلات زیر را به طریق کرامر حل کنید.

$$a) \begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ x - 2y + 2z = 10 \\ 3x - y - z = 4 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

حل a)**:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \left| \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{matrix} = (4+6-1) - (-6-4-1) = 9 - (-11) = 9 + 11 = 20$$

$$|A_x| = \left| \begin{matrix} 6 & 1 & 1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 6 & 1 \\ 10 & -2 \\ 4 & -1 \end{matrix} = 12 + 8 - 10 - (-8 - 12 - 10) = 10 - (-30) = 10 + 30 = 40 \Rightarrow |A_x| = 40$$

$$|A_y| = \left| \begin{matrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 2 & 6 \\ 1 & 10 \\ 3 & 4 \end{matrix} = -20 + 36 + 4 - (30 + 16 - 6) = 20 - 40 = -20 \Rightarrow |A_y| = -20$$

$$|A_z| = \left| \begin{matrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 10 \\ 3 & -1 & 4 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{matrix} = -16 + 30 - 6 - (36 - 20 + 4) = 8 - (-52) = 8 + 52 = 60 \Rightarrow |A_z| = 60$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{40}{20} = 2 \\ y &= \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-20}{20} = -1 \\ z &= \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{60}{20} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x, y, z) = (2, -1, 3)$$

حل b)**:**

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 4 = 8 \neq 0$$

$$|A_{x_1}| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 10 = 26 \quad \Rightarrow |A_{x_1}| = 26$$

$$|A_{x_2}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0 \quad \Rightarrow |A_{x_2}| = -3$$

$$x_1 = \frac{|A_{x_1}|}{|A|} = \frac{26}{8} = \frac{13}{4} \quad , \quad x_2 = \frac{|A_{x_2}|}{|A|} = \frac{-3}{8} \Rightarrow (x_1, x_2) = (\frac{13}{4}, -\frac{3}{8})$$

میزان:

$$x_1 - 2x_2 = 4$$

$$\frac{13}{4} - 2 \cdot -\frac{3}{8} = \frac{13}{4} + \frac{3}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$2x_1 + 4x_2 = 5$$

$$2 \cdot \frac{13}{4} + 4 \cdot \frac{-3}{8} = \frac{13}{2} - \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

7- سیستم معادلات زیر را به طریق Gouse حل کنید.

$$a) \begin{cases} 2x - 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \\ 5x - 4y - 2z = 0 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 2x + 3y - 7 = 1 \\ 2y + 27 = -2 \end{cases}$$

حل a):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 5 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 5 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-3R_1 + R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} + 2 & \frac{-9}{2} - 5 & 0 \\ 5 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{-19}{2} & 0 \\ 5 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-5R_1+R_3\to R_3}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{-19}{2} & 0 \\ 0 & \frac{15}{2}-4 & \frac{-15}{2}-2 & 0 \end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{-19}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{-19}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_3\to R_3}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{-19}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2}-\frac{13}{2} & 0 & 0 \end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{-19}{2} & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$-3y=0 \;\Rightarrow\; y=0$$

$$\frac{13}{2}y-\frac{19}{2}z=0 \;\Rightarrow\; -\frac{19}{2}z=0 \;\Rightarrow\; z=0$$

$$2x-3y+3z=0 \;\Rightarrow\; 2x-3\cdot 0+3\cdot 0=0 \;\Rightarrow\; 2x=0 \;\Rightarrow\; x=0 \;\Rightarrow\; (x,y,z)=(0,0,0)$$

حل b)**:**

$$\begin{cases} 2z+3y-7=1 \\ 2y+27=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=8 \\ 0\cdot x+2y=-29 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -29 \end{pmatrix}$$

$$2y=-29 \;\Rightarrow\; y=-\frac{29}{2}$$

$$2x+3y=8 \;\Rightarrow\; 2x+3\cdot\frac{-29}{2}=8 \;\Rightarrow\; 2x-\frac{87}{2}=8 \;\Rightarrow\; 2x=8+\frac{87}{2} \;\Rightarrow\; 2x=\frac{16+87}{2}=\frac{103}{2}$$

$$\Rightarrow\; x=\frac{103}{4} \;\Rightarrow\; (x,y)=(\frac{103}{4},\frac{-29}{2})$$

8- سیستم معادلات زیر را به طریق معکوس متریکس حل کنید.

$$a)\ \begin{cases} 3x+y+1=0 \\ 4x+3y-2=0 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x-y=2 \\ x+2y=-1 \end{cases}$$

حل a)**:**

$$\begin{cases} 3x+y+1=0 \\ 4x+3y-2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+y=-1 \\ 4x+3y=2 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \;,\quad B=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \;,\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}B$$

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=9-4=5$$

$$adjA=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -4 & 3\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adjA=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{-1}{5}\\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{-1}{5}\\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\\ \frac{4}{5}+\frac{6}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-5}{5}\\ \frac{10}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}\Rightarrow x=-1\ ,\quad y=2$$

$$(x,y)=(-1,2)$$

حل $b)$**:**

$$\begin{cases}x-y=2\\ x+2y=-1\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\ ,\quad B=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}\ ,\quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2+1=3$$

$$adjA=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

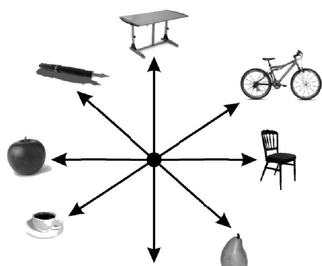
$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adjA=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\\ \frac{-2}{3}-\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{3}\\ \frac{-3}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\Rightarrow x=1\ ,\quad y=-1$$

$$\Rightarrow (x,y)=(1,-1)$$

فصل هفتم وکتورها



عنوان درس: وکتور در سیستم مختصات قایم

صفحهٔ کتاب (249)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی	شاگردان قادر شوند تا:
- دانشی	• مفهوم وکتور را بدانند.
- مهارتی	• مثال‌های مربوط وکتور را حل نمایند.
- ذهنیتی	• از وکتور در زنده‌گی روزمره استفاده کنند و از استفادهٔ آن احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی چارت شکل ورودی را که از قبل آماده ساخته است پیشروی صنف بیاویزد و توجه شاگردان را به آن جلب و از آنها بپرسد: • در شکل ورودی چی را می‌بینید؟ • روی بعضی دیوارها شاید این → علامه را دیده باشید، چی معنی دارد؟ • به نظر شما وکتور با قطعه خط چی فرق دارد؟ - معلم کوشش نماید تا جواب‌ها را از شاگردان به دست آورد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نماید و برای شان بگوید که فعالیت صفحهٔ 249 کتاب درسی را به مشورهٔ یکدیگر انجام دهند. بعد نمایندهٔ یک یا دو گروه فعالیت خود را به دیگران توضیح دهد، اگر کدام گروه در فعالیت خود اشتباه کرده باشند آن فعالیت توسط گروه دیگر در فضای دوستانه روی تخته اصلاح شود، در صورت اشتباه، معلم شاگردان را کمک و رهنمایی نماید و جریان درس را طور زیر آغاز نماید:

قطعه خط جهت دار را وکتور گویند و یا به عبارت دیگر کمیتی که هم جهت و هم مقدار داشته باشد مثل قوه، تعجیل وغیره به نام کمیت وکتوری یاد می‌شود و هر تیر ممثل یک وکتور است.

وکتوری که ابتدای آن در مبدأ سیستم کمیات وضعیهٔ قایم قرار داشته باشند به نام شعاع وکتور(*Position vector*) یاد میگردد. وکتوریکه طول آن صفر باشد به نام وکتور صفری(*Zero vector*) یاد میشود.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم غرض تحکیم بخشیدن درس، مثال صفحهٔ 250 کتاب درسی را به شاگردان بدهد که به شکل انفرادی بدون استفاده از کتاب حل نمایند.

- معلم چند تن از شاگردان را به نوبت بخواهد که مثال را روی تخته حل نموده، شاگردان دیگر حل خویش را با حل روی تخته مقایسه نمایند.

- معلم از فعالیت شاگردان نظارت نماید و اگر شاگردان مشکل داشته باشند، درس را دوباره برای شان توضیح دهد.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم غرض اطمینان از آموزش شاگردان، ایشان را با سؤالهای زیر ارزیابی نماید:

1. کی وکتور را تعریف کرده میتواند؟
2. تیر وکتور چی مفهوم دارد؟
3. اگر طول وکتور صفر باشد، آیا برایش وکتور گفته میتوانیم؟
4. هرگاه ابتدا یک وکتور در مبدأ مختصات قایم واقع باشد، این نوع وکتور را به چی نام یاد می‌کنند؟

- معلم کوشش نماید جواب‌ها را از شاگردان حاصل نماید در صورت مشکلات، شاگردان را کمک نماید.

معلومات اضافی برای معلم

بحث وکتور از بحث‌های مهم به شمار میرود. وکتور در فزیک مورد استعمال زیاد دارد؛ زیرا کمیت‌هایی که هم مقدار دارند و هم جهت، کمیت‌های وکتوری اند، مانند این که در قانون نیوتن قوه مساوی است به کتله ضرب تعجیل یا به شکل سمبولیک $\vec{F} = m\vec{a}$ یعنی هم قوه و هم تعجیل کمیت‌های وکتوری اند؛ همچنان کار که فرمول آن عبارت از $\vec{W} = \vec{F} \cdot d \cdot \cos\theta$ است یک کمیت وکتوری میباشد، ساحهٔ مقناطیسی هم یک فضایی وکتوری را تشکیل میدهد.

دو وکتور وقتی باهم مساوی اند که هم جهت بوده دارای طول‌های مساوی باشند، هرگاه جهت وکتور تغییر نماید منفی میشود؛ مانند وکتورهای زیر:

$$\overrightarrow{OB} = \vec{a} \qquad O \xrightarrow{\vec{a}} B$$

$$\overrightarrow{BO} = -\vec{a} \qquad O \xleftarrow{-\vec{a}} B$$

وکتور به دو شکل نشان داده میشود:

1. به شکل ستونی
2. به شکل سطری

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 250

1- برای وکتورهایی که در مثال 1 داده شده، مطلوب است.

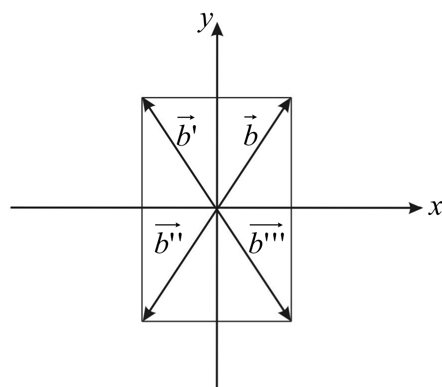
a): سه وکتور ممثل هر کدام را دریابید.

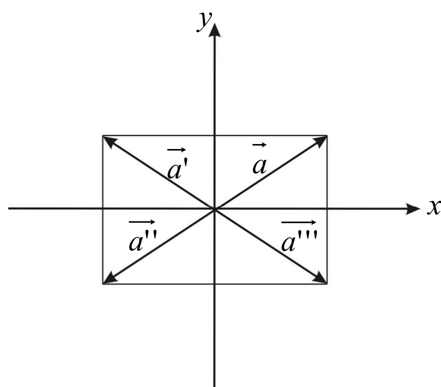
b): هر دو وکتور را در موقعیت شعاع وکتور رسم کنید.

c): وکتورهای مخالف آنها کدام وکتور ها اند؟

حل a)**:** وکتورهای مثال 1 عبارت اند از:

$$\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \text{ و } \vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$





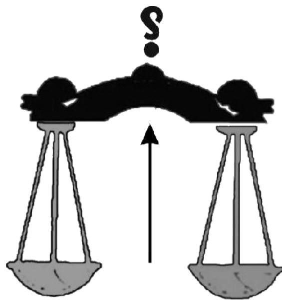
سه وکتور ممثل، وکتور $\vec{a}$ عبارت است از $\vec{a}'$ ، $\vec{a}''$ و $\vec{a}'''$ و سه وکتور ممثل، وکتور $\vec{b}$ عبارت از $\vec{b}'$ ، $\vec{b}''$ و $\vec{b}'''$ میباشد.

حل b)**:** جز b سؤال در صفحهٔ 250 کتاب حل شده(وکتورهای که رسم شده در موقعیت شعاع وکتور قرار دارد.)

حل c)**:** میدانیم که وکتور $\vec{a}$ و $-\vec{a}$ وکتورهای مخالف اند.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \quad , \quad -\vec{a}=-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \quad , \quad -\vec{b}=-\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$$



فصل هفتم وکتورها

عنوان درس: فاصله و نقطهٔ وسطی بین دو نقطه

صفحهٔ کتاب (251)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم فاصلهٔ وسطی بین دو نقطه را بدانند. • سؤالهای مربوط موضوع را حل نمایند. • با داشتن دانش و مهارت فوق مسائل روزمره را حل و از حل مسائل احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، نکات مهم درس گذشته را طور مختصر تکرار نماید و توجه شاگردان رابه چارت شکل ورودی که از قبل تهیه نموده است جلب نماید و از ایشان بپرسد: • آیا میتوانید فاصله بین دو نقطهٔ مشخص را دریابید؟ • فارمول دریافت فاصله بین دو نقطه کدام است؟ • روی خط کش نقطه‌یی را تعیین نمایید که توسط انگشت شهادت تعادل آن حفظ باشد. - معلم کوشش نماید که جوابها را از شاگردان حاصل نماید و در غیر آن آنها را کمک نماید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نماید و برای شان بگوید که فعالیت صفحهٔ 251 کتاب را در گروه‌های خویش با مشورت یکدیگر انجام دهند؛ سپس نمایندهٔ دو یا سه گروه فعالیت خویش را به دیگران توضیح دهند، اگر کدام اشتباه کرده باشند، اشتباه توسط گروه دیگر اصلاح شود، در صورت مشکلات معلم کمک و رهنمایی نماید و جریان درس را طور زیر آغاز نماید:

فاصله بین دو نقطه توسط فورمول $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ به دست می‌آید. x_2 مرکبهٔ دوم و x_1 مرکبهٔ اول و همچنان y_2 مرکبهٔ دوم و y_1 مرکبهٔ اول را نشان میدهد.

فرمول نقطهٔ وسطی نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) عبارت است از $X_m = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{y_1+y_2}{2} \end{pmatrix}$ ، کـه X_m نقطهٔ وسـطی همین خط(وکتور) است $X_m = (x_m, y_m) = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم غرض تحکیم بیشتر درس مثال 1 صفحهٔ 252 کتاب را بـه شـاگردان بدهـد تـا در کتابچـه‌هـای خویش(بـدون استفاده از کتاب) حل نمایند، همزمان یک شاگرد روی تخته به حل مثال بپردازد.

شاگردان حل‌های خویش را با حل روی تخته مقایسه نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای حاصل کردن اطمینان از آموزش شاگردان، آنها را با پرسیدن سؤالهای زیر ارزیابی کند:

1. آیا از دو نقطهٔ (x_1, y_1) و (x_2, y_2) همیشه یک خط عبور می‌کند؟
2. معادلهٔ ریاضیکی خط نامبرده کدام شکل را دارد؟
3. فرمول نقطه‌یی را بگویید که نصف خط طرف راست و نصف خط طرف چپ آن قرار داشته باشد؟

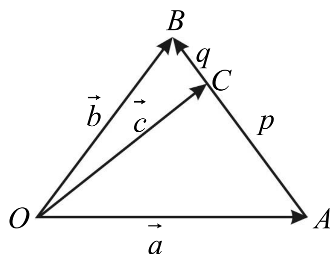
معلم کوشش نماید که جواب‌ها را از شاگردان حاصل کند و اگر مشکل داشته باشد همکاری کند.

معلومات اضافی برای معلم

- برای افزایش معلومات معلم محترم قضیهٔ زیر را در نظر میگیریم:

قضیه: هرگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب شعاع وکتـور نقـاط A و B باشـد، C داخلاً خط AB را به نسبت $\frac{p}{q}$ تقسـیم مـی‌کنـد؛ پـس $\vec{c}$ شـعاع وکتور نقطهٔ C عبارت است از: $\vec{c} = \frac{qa+pb}{q+p}$

هرگاه $p = q$ باشد، C نقطهٔ وسطی خط AB است.



ثبوت: اگر C خط AB را به نسبت $\frac{p}{q}$ تقسیم کند؛ پس:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{p}{q} \Rightarrow q \cdot AC = p \cdot BC$$

از شکل OAC میدانیم که:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{p} = \vec{a} + \frac{\vec{p}}{\overrightarrow{AB}} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{p}{p+q} \cdot \overrightarrow{AB}$$

از شکل میدانیم که: $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

$$\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \frac{\vec{p}}{\vec{p}+\vec{q}}(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{\vec{p}\vec{b} - \vec{a}\vec{p}}{\vec{p}+\vec{q}}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\vec{a}p + \vec{a}q + p\vec{b} - \vec{a}p}{\vec{p}+\vec{q}} = \frac{\vec{a}q + p\vec{b}}{p+q} \Rightarrow \vec{c} = \frac{\vec{a}q + p\vec{b}}{p+q}$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 252

فاصله و نقطهٔ وسطی بین نقاط داده شده زیر را دریافت نمایید؟

$i)\quad A(3,4) \quad , \quad B(2,7)$

$ii)\quad N(5,1) \quad , \quad M(1,5)$

$iii)\quad Q(8,8) \quad , \quad P(1,8)$

حل:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$i)\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(2-3)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3+2}{2} \\ \frac{4+7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 5.5 \end{pmatrix}$$

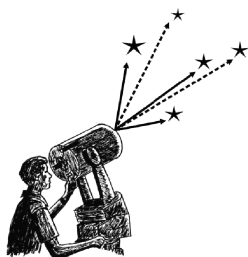
$$ii)\ \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-5)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+5}{2} \\ \frac{5+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$iii)\ \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(8-1)^2 + (8-8)^2} \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{49+0} = 7$$

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8+1}{2} \\ \frac{8+8}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{16}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 8 \end{pmatrix}$$



فصل هفتم وکتورها

عنوان درس: وکتورها در سطح و فضا

صفحهٔ کتاب (253)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم وکتورها را در سطح و فضا بدانند. • مثالها و سؤالهای مربوط را حل کنند. • وکتورهای سطح و فضا را از هم تشخیص نمایند و در زنده‌گی روزمره از آن استفاده کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت، چارت شکل ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی از درس گذشته طور مختصر یاد آوری کند، توجه شاگردان را به چارت شکل ورودی که از قبل تهیه نموده است جلب نموده و از ایشان بپرسد: • در سطح و فضا وکتورها از هم چه فرق دارد؟ • آیا نمایش ستونی و یا سطری وکتور بالای طول وکتور کدام تأثیر دارد؟ - معلم کوشش نماید که جوابها را از شاگردان حاصل نماید و در غیر آن، آنها را کمک نماید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند و برایشان هدایت دهد تا فعالیت صفحهٔ 253 کتاب را در گروه‌های خویش با بحث و مذاکره انجام دهند، سپس نمایندهٔ یک یا دو گروه فعالیت خویش را به دیگران توضیح دهد، اگر کدام گروه اشتباه را مرتکب میشود آنرا توسط گروه دیگر اصلاح نماید. هرگاه در انجام دادن فعالیت مشکل داشته باشند معلم آنها را رهنمایی و کمک کند و به تدریس به طور زیر بپردازد:

ست تمام جوره‌های مرتب که برای آنها مانند فوق قاعده جمع و ضرب سکالری صدق کند، به نام فضای وکتوری IR^2 و یا وکتورها در مستوی یاد میگردد. با در نظرداشت دو وکتور خاص $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ و $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ که طول آنها یک واحد یعنی $|\vec{i}|=|\vec{j}|$ بوده و برای هر وکتور اختیاری $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$، $u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$ ، $\vec{i}$ و $\vec{j}$ را به نام وکتورهای واحد به امتداد محورهای x و y یاد می‌نمایند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس دو جزء ii و iii مثال 1 صفحهٔ 254 کتاب را به شاگردان بدهد که به شکل انفرادی در کتابچه‌های خویش بدون استفاده از کتاب حل نمایند.

- معلم یک شاگرد را روی تخته بخواهد که مثال نامبرده را حل کند، شاگردان دیگر حل‌های خود را با حل روی تخته مقایسه کنند. اگر شاگردی اشتباه کرده باشد اشتباه خود را از روی تخته اصلاح نماید، معلم از کار شاگردان نظارت نماید و در صورت مشکلات، آنها را کمک کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای حاصل کردن اطمینان از آموزش شاگردان ایشان را با سؤالهای زیر ارزیابی کند:

1. از وکتور در سطح چه نوع استفاده می‌شود؟
2. نمایش ستونی و سطری وکتور از هم دیگر چه فرق دارد؟
3. از واحد وکتور در کدام جای استفاده می‌شود؟

- معلم کوشش کند که جواب‌ها را از شاگردان به دست بیاورد در غیر آن نکات مهم را دوباره برایشان تکرار کند.

معلومات اضافی برای معلم

- برای اینکه معلومات معلم محترم افزایش یابد؛ پس در مورد واحد وکتور معلومات مختصر قرار ذیل است:
واحد وکتور عبارت از وکتوری است که طول آن یک واحد باشد وکتور واحد برای تزاید جهت مختصه به کار میرود. تمام ساحه‌های مقناطیسی و برقی ساحه‌های وکتوری اند، که از واحد وکتور استفاده مینمایند. واحد وکتور یک وکتور عبارت است از نسبت آن وکتور بر طول آن، یعنی واحد وکتور $\vec{a}$ عبارت است از:

$$\overrightarrow{e_a}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad , \quad \vec{a}=|\vec{a}|\cdot\overrightarrow{e_a}$$

پس یک وکتور $\vec{a}$ مساوی است به طول وکتور $\vec{a}$ ضرب واحد وکتور آن در سطح. واحد وکتور محوری x و y به ترتیب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ میباشد؛ که $\vec{i}=(1,0)$ و $\vec{j}=(0,1)$ است.

مثال: واحد وکتور، وکتور داده شدهٔ $\vec{a}=2\vec{i}+4\vec{j}$ را به دست می‌آوریم:

$$\overrightarrow{e_a}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{2\vec{i}+4\vec{j}}{\sqrt{4+16}}=\frac{2\vec{i}+4\vec{j}}{\sqrt{20}}=\frac{2\vec{i}+4\vec{j}}{2\sqrt{5}}=\frac{2\vec{i}}{2\sqrt{5}}+\frac{4\vec{j}}{2\sqrt{5}}$$

پس واحد وکتور، وکتور $\vec{a}$ عبارت از $\leftarrow$ $\overrightarrow{e_a}=\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$ است.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 254

1- هرگاه $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ و $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ باشند، $\vec{u}+2\vec{v}$، $\vec{u}-2\vec{v}$ و $2\vec{u}+4\vec{v}$ را دریافت کنید.

حل:

$$2\overrightarrow{u}=2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot2\\2(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$$

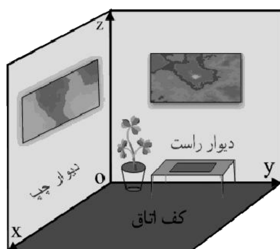
$$2\overrightarrow{v}=2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot3\\2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$$

$$4\overrightarrow{v}=4\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot3\\4\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\8\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+6\\-1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-6\\-1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$$

$$2\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+12\\-2+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\6\end{pmatrix}$$



فصل هفتم وکتورها

عنوان درس: مختصات نقطه در فضای سه بُعدی

صفحهٔ کتاب (255)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم مختصات نقطه را در فضای سه بعدی بدانند. • یک نقطه را در فضای سه بعدی تعیین کنند. • با داشتن دانش و مهارت فوق در زنده گی روزمره از آن استفاده کنند و احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت، چارت شکل ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی به شاگردان نکات مهم درس گذشته را طور مختصر یاد آوری کند و توجه شاگردان را به چارت شکل ورودی که از قبل تهیه کرده است جلب نموده واز ایشان بپرسد: • شما در شکل چی را می‌بینید؟ • دیوار چپ، دیوار راست و کف اتاق با یکدیگر چه ارتباط دارد؟ • در شکل چند مستوی را می‌بینید؟ - معلم کوشش نماید که جوابها را از شاگردان حاصل نماید و در غیر آن کمک نماید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم جریان درس را به شکل زیر آغاز نماید:

فضایی که در آن زنده‌گی می‌کنیم به نام فضای سه بُعدی یاد میشود، فضای IR^3 عبارت از مجموعهٔ تمام سه‌تایی‌های مرتب x,y,z میباشد که این طور تعریف میشود: $IR^3 = IR \times IR \times IR = \{(x,y,z) \ / \ x,y,z \in IR\}$

فضای سه بعدی توسط سه محور x,y,z تعریف میگردد، که این محورها در نقطهٔ O بالای یکدیگر عمود میباشند که این محورها سه مستوی P_2, P_1 و P_3 را تشکیل می‌دهند.

مختصات قایم فضای سه بعدی را طور زیر نامگذاری می کنیم:

اگر یک نفر بایستد، محوری که به امتداد تنه آن قرار دارد محور z، محوری که رو به روی آن قرار دارد محور y و محور دست راست را محور x می‌نامیم، نقطهٔ تقاطع این سه محور(O) عبارت از مبدأ مختصات می‌باشد.

در اخیر تعیین یک نقطه را در فضای سه بُعدی برای شان توضیح دهد.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم غرض تحکیم بخشیدن درس معلوماتی که در مورد تعیین نقطه در فضای سه بعـدی در صـفحهٔ 255 کتـاب داده شده است مرحله به مرحله با سهم گیـری شـاگردان روی تختـه بـه طـور عملـی تطبیـق نمایـد؛ سـپس بـا سـهیم سـاختن شاگردان نقطهٔ $(x,y,z)=(2,3,1)$ را در فضای سه بُعدی روی تخته تعیین کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای حاصل کردن اطمینان از آموزش شاگردان ایشان را با سؤالهای زیر ارزیابی کند:

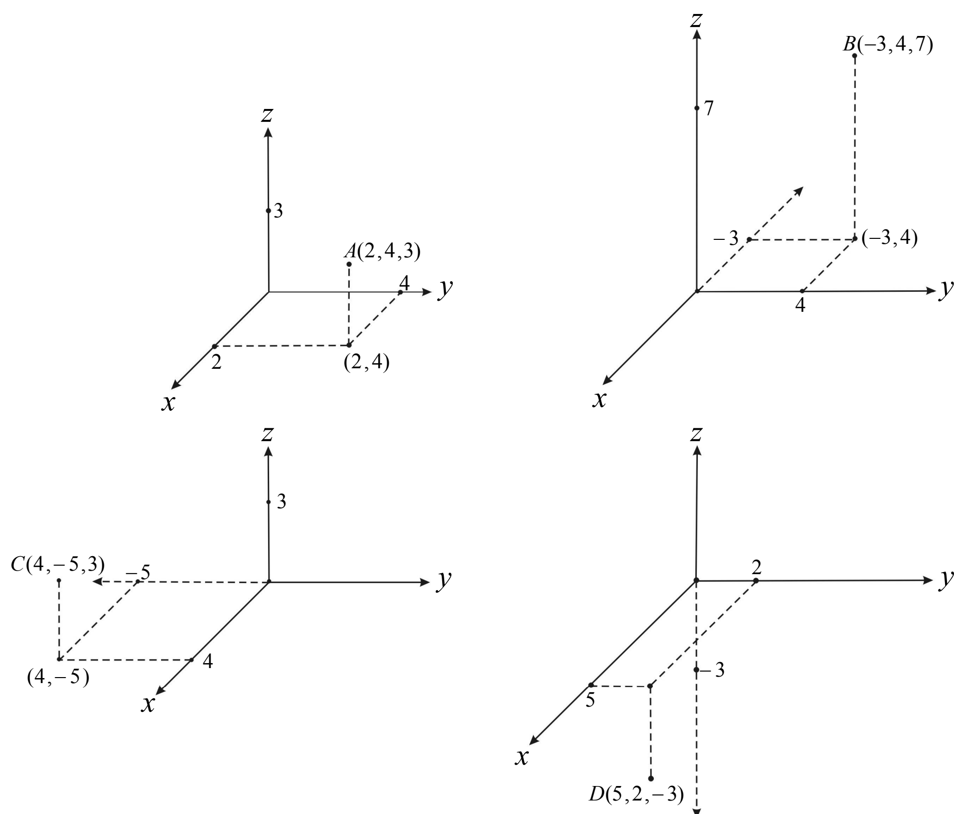
1. آیا میتوانید نقطهٔ (x,y) را روی مستوی کمیات وضعیه تعیین کنید؟
2. فضای دو بعدی و سه بعدی از هم چه فرق دارند؟
3. آیا میتوانید نقطهٔ $(6,3,7)$ را در فضای سه بعدی نشان دهید؟

- معلم کوشش نماید که جوابها را از شاگردان حاصل کند، در غیر آن در زمینه شاگردان را کمک و رهنمایی کند.

معلومات اضافی برای معلم

برای افزایش معلومات معلم درمورد موضوع فوق، چند مثال را در نظر میگیریم:

مثال: نقاط $A(2,4,3)$ ، $B(-3,4,7)$ ، $C(4,-5,3)$ و $D(5,2,-3)$ را در فضای سه بعدی نشان دهید.



جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 258

1- جهت وکتور های واحد $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را در یافت کنید.

حل: از واحد وکتور برای تزاید جهت مختصه استفاده میشود و واحد وکتور عبارت از نسبت وکتور بر نورم آن می‌باشد که به شکل سمبولیک واحد وکتور، $\vec{a}$ عبارت است از: $\overrightarrow{e_a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$$\overrightarrow{e_u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e_v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{9+4}} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

2- وکتورهای $\vec{v}$، $\vec{u}$ و $\vec{w}$ که در مثال 3 داده شده درنظر گرفته مطلوب است.

$a)\ 2\vec{u}-6\vec{v}+4\vec{w}=?$ $\qquad b)\ |\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}-2\vec{w}|=?$

حل:

$$\begin{aligned} a)\ 2\vec{u}-6\vec{v}+4\vec{w} &= 2(2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k})-6(4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k})+4(6\vec{i}-9\vec{j}-3\vec{k}) \\ &= 4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}-24\vec{i}-36\vec{j}-12\vec{k}+24\vec{i}-36\vec{j}-12\vec{k} \\ &= (4-24+24)\vec{i}+(6-36-36)\vec{j}+(2-12-12)\vec{k} \\ &= 4\vec{i}-66\vec{j}-22\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b)\ |\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}-2\vec{w}| &= \left|(2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k})-\frac{1}{3}(4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k})-2(6\vec{i}-9\vec{j}-3\vec{k})\right| \\ &= \left|(2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k})-\frac{4}{3}\vec{i}-2\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}-12\vec{i}+18\vec{j}+6\vec{k}\right| \\ &= \left|(2-\frac{4}{3}-12)\vec{i}+(3-2+18)\vec{j}+(1-\frac{2}{3}+6)\vec{k}\right| = \left|-\frac{34}{3}\vec{i}+19\vec{j}+\frac{19}{3}\vec{k}\right| \\ &= \sqrt{(-\frac{34}{3})^2+(19)^2+(\frac{19}{3})^2} = \sqrt{\frac{1156}{9}+361+\frac{361}{9}} = \sqrt{361+\frac{1517}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{3249+1517}{9}} = \sqrt{\frac{4766}{9}} = \frac{69.036}{3} = 23.012 \end{aligned}$$

3- فاصله بین وکتورهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ و $\vec{w}$ و $\vec{u}$ را دریافت کنید.

حل:

$$\left|\overrightarrow{uv}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{uv}\right| = \sqrt{(4-2)^2 + (6-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14} \quad \Rightarrow \boxed{\left|\overrightarrow{uv}\right| = \sqrt{14}} \quad \Rightarrow \left|\overrightarrow{uv}\right| = 3.74$$

$$\left|\overrightarrow{vw}\right| = \sqrt{(6-4)^2 + (-9-6)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{2^2 + 15^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 225 + 25} = \sqrt{225}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left|\overrightarrow{vw}\right| = \sqrt{254}} \qquad \Rightarrow \left|\overrightarrow{vw}\right| = 15.9$$

$$\left|\overrightarrow{wu}\right| = \sqrt{(2-6)^2 + (3+9)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{4^2 + 12^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 144 + 16} = \sqrt{176} = 4\sqrt{11}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left|\overrightarrow{wu}\right| = 4\sqrt{11}} \qquad \Rightarrow \left|\overrightarrow{wu}\right| = 13.2$$

5- آن وکتور واحد ها را در یافت کنید که هم جهت وکتور $\vec{u}, \vec{v}$ و $\vec{w}$ واقع باشند.

حل:

$$\vec{e_u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$$

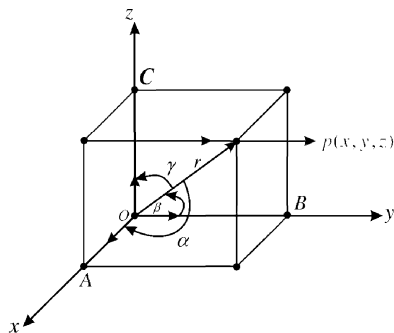
$$\Rightarrow \quad \vec{e_u} = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$$

$$\vec{e_v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{4^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{16 + 36 + 4}} = \frac{4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{56}} = \frac{4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}}{2\sqrt{14}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{e_v} = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$$

$$\vec{e_w} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{6^2 + (-9)^2 + (-3)^2}} = \frac{6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{36 + 81 + 9}} = \frac{6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{126}} = \frac{6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}}{3\sqrt{14}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{e_w} = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$$



فصل هفتم وکتورها

عنوان درس: زوایای جهت و کوساین‌های جهت یک وکتور

صفحهٔ کتاب (259)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم زوایای جهت و کوساین‌های جهت یک وکتور را بدانند. • مثال‌های مربوط زوایای جهت و کوساین‌های جهت یک وکتور را حل کنند. • از کسب دانش و مهارت فوق اعتماد به نفس پیدا کرده و احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	اشیای مورد ضرورت، چارت شکل ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، نکات مهم درس گذشته را یادآوری نموده و توجه شاگردان را به چارت شکل ورودی جلب نماید و از ایشان بپرسد: • در چارت چی را می‌بینید؟ • توسط یک وکتور در فضا چند زاویه تشکیل میشود؟ - معلم کوشش کند تا جوابها را از شاگردان حاصل نماید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نماید تا فعالیت صفحهٔ 259 کتاب را به مشورت یکدیگر انجام دهند، در ختم فعالیت نمایندهٔ یک یا دو گروه فعالیت خویش را به دیگران توضیح کند، هرگاه کدام گروه در انجام فعالیت خویش اشتباه کرده باشد توسط نمایندهٔ یک گروه دیگر اصلاح شود. در صورت مشکلات معلم شاگردان را رهنمایی نماید و جریان درس را چنین آغاز کند:

هرگاه شعاع وکتور $\vec{r}$ با محورهای مختصات قایم به ترتیب زوایای α, β و γ را بسازد درین صورت میتوان نوشت: $\overrightarrow{OC}=\vec{r_z}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{r_y}$, $\overrightarrow{OA}=\vec{r_x}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{r}$

کوساین‌های جهت وکتور، وکتور $\vec{r}$ را طور زیر نوشته کرده میتوانیم:

$$\cos\alpha=\frac{x}{r} \Rightarrow x=r\cos\alpha$$

$$\cos\beta=\frac{y}{r} \Rightarrow y=r\cos\beta$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{r} \Rightarrow z=r\cos\gamma$$

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم غرض تحکیم درس یک شاگرد را هدایت دهد تا روی تخته نقطه را در فضای سه بُعدی نشان دهد و شعاع وکتور نقطهٔ نامبرده را رسم نماید؛ سپس زوایای جهت و کوساین‌های جهت آن را دریافت کند.

- معلم از گروه‌ها نظارت کند همزمان شاگردان دیگر نیز در کتابچه‌های خویش عین فعالیت را انجام دهند، در اخیر فعالیت خویش را به دیگران توضیح دهد و شاگردان دیگر حل‌های فعالیت خویش را با آن مقایسه نمایند و در صورتی‌که اشتباه داشته باشند؛ آن را اصلاح نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم غرض اطمینان خویش شاگردان را با سؤالهای زیر ارزیابی نماید:

1. زوایای جهت و کوساین‌های جهت کدام وکتور را پیدا کرده میتوانیم؟
2. زاویهٔ α با کدام محور تشکیل میشود؟
3. زاویهٔ γ با شعاع وکتور چه ارتباط دارد؟

معلم محترم کوشش نماید که جواب‌ها را از شاگردان حاصل کند و در غیر آن خودش کمک کند.

معلومات اضافی برای معلم

غرض ازدیاد معلومات معلم، تعریف ذیل را در نظر میگیریم:

شعاع وکتور: عبارت از وکتوری است که ابتدای آن در مبدأ کمیات وضعیه فضای سه بعدی قرار داشته باشد.

α: زاویه‌یی است که شعاع وکتور با محور x میسازد.

β: زاویه‌یی است که شعاع وکتور با محور y میسازد.

γ: زاویه‌یی است که شعاع وکتور با محور z میسازد.

همچنان $\vec{i}$, $\vec{j}$ و $\vec{k}$ واحد وکتورهای فضای سه بعدی است $\vec{i}$ واحد وکتور محور x، $\vec{j}$ واحد وکتور محور y و $\vec{k}$ واحد وکتور محور z میباشد، و قیمت‌های آن‌ها قرار ذیل است:

$$\vec{i}=(1,0,0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{j}=(0,1,0)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{k}(0,0,1)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 260

1- هرگاه $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ و $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ باشند دریافت کنید:

$a)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=? \qquad b)\ v-3\vec{w}=? \qquad c)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

حل:

$$a)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}+2(3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k})+5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$$

$$=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}+6\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}+5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}=12\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=12\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}}$$

$$b)\ \vec{v}-3\vec{w}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}-3(5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k})=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}-15\vec{i}+3\vec{j}-9\vec{k}$$

$$=-12\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{v}-3\vec{w}=-12\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k}}$$

$$c)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=\left|3(3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k})+5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\right|=\left|9\vec{i}-6\vec{j}+6\vec{k}+5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\right|$$

$$=\left|14\vec{i}-7\vec{j}+9\vec{k}\right|=\sqrt{14^2+(-7)^2+9^2}=\sqrt{196+49+81}=\sqrt{326}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=\sqrt{326}}$$

2- قیمت α را طوری دریافت نمایید که طول وکتور $\alpha\vec{i}+(\alpha+1)\vec{j}+2\vec{k}$ مساوی به 3 باشد؟

حل:

$$\left|\alpha\vec{i}+(\alpha+1)\vec{j}+2\vec{k}\right|=3$$

$$\sqrt{\alpha^2+(\alpha+1)^2+2^2}=3$$

$$\sqrt{\alpha^2+\alpha^2+2\alpha+1+4}=3 \Rightarrow (\sqrt{2\alpha^2+2\alpha+5})^2=3^2 \Rightarrow 2\alpha^2+2\alpha+5=9$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2+2\alpha-4=0 \Rightarrow \alpha^2+\alpha-2=0 \Rightarrow (\alpha-1)(\alpha+2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha=1\\ \alpha+2=0 \Rightarrow \alpha=-2\end{cases}$$

فصل هفتم وکتورها

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$$

عنوان درس: حاصل ضرب سکالری دو وکتور

صفحهٔ کتاب (261)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم حاصل ضرب سکالری دو وکتور را بدانند. • ضرب سکالری دو وکتور را در یک مثال عددی تطبیق کنند. • با کسب دانش و مهارت فوق اعتماد به نفس پیدا کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	اشیای مورد ضرورت، چارت شکل ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، از درس گذشته به طور مختصر یادآوری کند و توجه شاگردان را به چارت شکل ورودی که از قبل تهیه کرده است جلب نموده و از ایشان بپرسد: • آیا میتوانید حاصل ضرب دو عدد حقیقی را به دست آرید؟ • تا کنون شما برای ضرب کردن دو عدد حقیقی از علامه‌های$(\times,\cdot)$ استفاده کرده اید، آیا برای ضرب دو وکتور میتوانید از علامات نامبرده استفاده کنید؟ - معلم محترم کوشش نماید که جوابها را از شاگردان به دست آورد، در غیر آن معلم کمک نماید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نماید و برایشان بگوید تا فعالیت صفحهٔ 261 کتاب را با مشورت یکدیگر در گروه خویش انجام دهند. بعد نمایندهٔ یک یا دو گروه فعالیت خویش را به دیگران توضیح کند.

هرگاه کدام گروه اشتباه کرده باشد اشتباه آن را توسط گروه دیگر اصلاح نماید وجریان درس را آغاز کند:

دو وکتور خلاف صفر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را در مستوی و یا در فضا در نظر میگیریم، حاصل ضرب سکالری $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را به شکل $\vec{u}\cdot\vec{v}$ نشان میدهیم، هرگاه $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو وکتور باشند و بخواهیم حاصل ضرب سکالری آن را به دست آوریم؛ پس می‌نویسیم که: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$

طوریکه $|\vec{u}|$ طول وکتور $\vec{u}$ و $|\vec{v}|$ طول وکتور $\vec{v}$ و θ زاویه بین وکتورهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$، $(0\le\theta\le\pi)$ است. اگر بخواهیم زاویه بین دو وکتور را پیدا کنیم از فرمول $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$ استفاده می‌کنیم. در اخیر معلم مثال 1

صفحهٔ 262 کتاب را با درنظرداشت تعریف ضرب سکالری دو وکتور قدم به قدم به شیوهٔ سؤال و جواب حل و خواص آن را برای شاگردان تشریح نماید.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم غرض تحکیم درس به شاگردان وظیفه دهد تا مثال 3 صفحهٔ 263 کتاب را به شکل انفرادی(یک شاگرد روی تخته و دیگران در کتابچه‌های خویش بدون استفاده از کتاب در صنف حل نمایند). اگر شاگردان در حل آن مشکل داشته باشند ایشان را کمک کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای اطمینان خویش از فراگیری شاگردان، آنها را توسط سؤالهای زیر ارزیابی نماید:

1. حاصل ضرب دو عدد حقیقی کدام عدد است؟
2. آیا حاصل ضرب سکالری دو وکتور یک کمیت وکتوری است یا سکالری؟
3. در اعداد حقیقی خاصیت تبدیلی یعنی $2\cdot 3 = 3\cdot 2$ یا $a\cdot b = b\cdot a$ صدق میکند، آیا در حاصل ضرب سکالری دو وکتور نیز خاصیت تبدیلی صدق مینماید؟

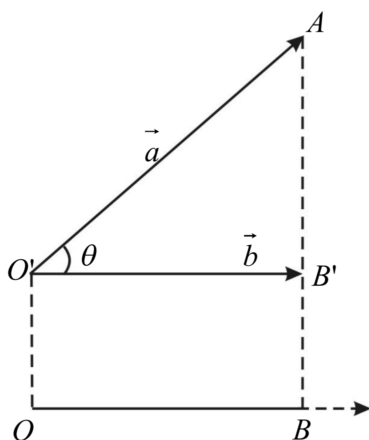
- معلم محترم کوشش نماید که جواب‌ها را از شاگردان حاصل نماید، در غیر آن ایشان را کمک کند.

معلومات اضافی برای معلم

در تمرینات بعضی سؤالها است که توسط معلومات زیر حل میشود:

تصویر(ارتسام) یک وکتور در جهت معین: هرگاه زاویه بین وکتورهای $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ را به θ نشان دهیم؛ پس تصویر(ارتسام)(projection) وکتور $\overrightarrow{a}$ به جهت $\overrightarrow{b}$ عبارت است از:

$$P_{\overrightarrow{b}}^{\overrightarrow{a}} = |\overrightarrow{a}|\cos\theta\,\overrightarrow{e_b}$$



میدانیم که:

$$\overrightarrow{e_b} = \frac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}$$

$$P_{\overrightarrow{b}}^{\overrightarrow{a}} = |\overrightarrow{a}|\cos\theta\cdot\overrightarrow{e_b} = |\overrightarrow{a}|\cdot\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}\cdot\frac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|} = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|\cdot|\overrightarrow{b}|}\cdot\overrightarrow{b}$$

در نتیجه $P_{\overrightarrow{b}}^{\overrightarrow{a}} = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|\cdot|\overrightarrow{b}|}\overrightarrow{b}$ مرتسم یا تصویر وکتور $\overrightarrow{a}$ به جهت وکتور $\overrightarrow{b}$ است.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 264

1- نشان دهید که مرتسم های وکتور $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ به امتداد وکتور واحدهای $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ به ترتیب مساوی به a، b و c میباشند.

حل: مرتسم وکتور $\vec{a}$ به امتداد وکتور $\vec{b}$ قرار زیر است:

$$P_{\vec{b}}^{\vec{a}}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{b}|}\cdot\vec{b}$$

پس داریم که:

$$P_{\vec{i}}^{\vec{v}}=\frac{\vec{i}\cdot\vec{v}}{\vec{i}\cdot\vec{i}}\cdot\vec{i}=\frac{\vec{i}\,(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})}{1}\cdot\vec{i}=(ai\cdot i+bi\cdot j+ci\cdot k)i=ai$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{\vec{i}}^{\vec{v}}=ai}$$

$$P_{\vec{j}}^{\vec{v}}=\frac{\vec{j}\cdot\vec{v}}{\vec{j}\cdot\vec{j}}\cdot\vec{j}=\frac{\vec{j}\,(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})}{1}\cdot\vec{j}=bj$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{\vec{j}}^{\vec{v}}=bj}$$

$$P_{\vec{k}}^{\vec{v}}=\frac{\vec{k}\cdot\vec{v}}{\vec{k}\cdot\vec{k}}\cdot\vec{k}=\frac{\vec{k}\,(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})}{1}\cdot\vec{k}=ck$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{\vec{k}}^{\vec{v}}=c\vec{k}}$$

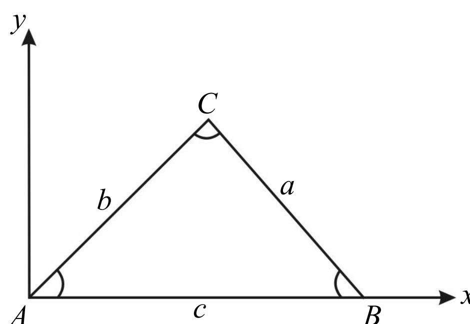
2- نشان دهید که برای هر مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ روابط زیر صدق می‌کنند:

$i)\ a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A \qquad ii)\ a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$

حل:

$i)$

$$a=|\overline{BC}|=\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$



طوریکه $x=b\cos A$ و $y=b\sin A$ میباشد؛ پس:

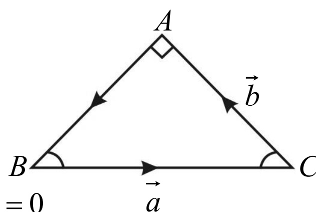
$$a=\sqrt{(b\cos A-c)^2+(b\sin A)^2}\ \Rightarrow\ a=\sqrt{b^2\cos^2A-2bc\cos A+c^2+b^2\sin^2A}$$

$$\Rightarrow\ a^2=b^2(\cos^2A+\sin^2A)-2bc\cos A+c^2$$

$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A}$$

$ii)$

$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$



$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0\ /\cdot\vec{a}$

$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot 0=0$

$\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

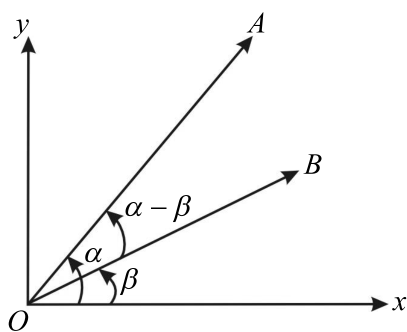
$|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|+|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ-C)+|\vec{a}||\vec{c}|\cos(180^\circ-B)=0$

$a\cdot a-ab\cos C-ac\cos B=0$

$a^2-ab\cos C-ac\cos B=0/\div a$

$a-b\cos C-c\cos B=0 \quad\Rightarrow\quad a=b\cos C+c\cos B$

3- ثبوت کنید که: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$



حل: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

هرگاه $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ در مستوی xy دو واحد وکتور باشند، این دو واحد وکتور زوایای α و β را در مستوی xy تشکیل میدهد و همچنان میدانیم که:

$\vec{a}=a_1i+a_2j=xi+yj$

مرکبهٔ وکتور $\vec{a}$ روی محور x عبارت از $a_1=x=\cos\alpha$ و مرکبهٔ آن روی محور y عبارت است از $a_2=y=\sin\alpha$ و نورم یا طول وکتورهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عبارت از $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ است؛ پس نوشته کرده میتوانیم:

$\vec{a}=a_1i+a_2j=xi+yj=\cos\alpha\, i+\sin\alpha\, j\ \ldots\ \text{I}$

$\vec{b}=b_1i+b_2j=xi+yj=\cos\beta\, i+\sin\beta\, j\ \ldots\ \text{II}$

زاویه بین وکتورهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عبارت از $(\alpha-\beta)$ و حاصل ضرب سکالری وکتورهای $\vec{a}$ او $\vec{b}$ را طور زیر به دست می‌آوریم.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\alpha-\beta)=1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta)\ \ldots\ \text{III}$

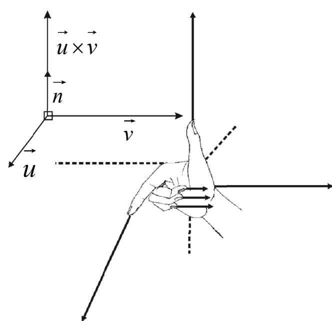
اگر رابطه‌های I و II را باهم ضرب کنیم، به دست می‌آید که:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\cos\alpha\, i+\sin\alpha\, j)\cdot(\cos\beta\, i+\sin\beta\, j)$

$=\cos\alpha\, i\cos\beta\, i+\cos\alpha\, i\sin\beta\, j+\sin\alpha\, j\cos\beta\, i+\sin\alpha\, j\sin\beta\, j$

$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\ \ldots\ \text{IV}$

از روابط III و IV نوشته کرده میتوانیم که: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$



فصل هفتم وکتورها

عنوان درس: حاصل ضرب وکتوری دو وکتور

صفحهٔ کتاب (265)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم ضرب وکتوری را بدانند. • حاصل ضرب وکتوری دو وکتور را به دست بیاورند. • با کسب دانش ومهارت فوق اعتماد به نفس پیدا کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، طور مختصر از درس گذشته یادآوری کند و توجه شاگردان را به چارت شکل ورودی که از قبل تهیه کرده است جلب نموده و از ایشان بپرسد: • در چارت چی می بینید؟ • در چارت چند وکتور را می بینید و با یکدیگر چی ارتباط دارند؟ - معلم محترم کوشش نماید که جوابها را از شاگردان به دست بیاورد و در صورت موجودیت مشکلات، آنها را کمک کند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم جریان درس را قرار زیر آغاز نماید:

وکتورهای خلاف $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را در نظر میگیریم، حاصل ضرب وکتوری دو وکتور $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را به $\vec{u}\times\vec{v}$ نشان میدهند و قرار زیر تعریف میشود: $\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta\,\vec{n}$

در حالیکه θ زاویه بین وکتورهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ $(0\le\theta\le\pi)$ و $\vec{n}$ عبارت از وکتور واحد است که بالای مستوی که توسط وکتورهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تشکیل میشود عمود است، یا به عبارت دیگر حاصل ضرب وکتوری، وکتورهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ عبارت از وکتور سومی است که بالای مبدأ وکتورهای نامبرده عمود باشد.

یک فرق مهم بین ضرب سکالری و وکتوری اینست که حاصل ضرب سکالری دو وکتور یک سکالر و حاصل ضرب وکتوری دو وکتور یک وکتور میباشد.

ترکیب خطی دو وکتور: مجموع مضرب‌های سکالری وکتورهای یک ست به نام ترکیب خطی وکتورهای آن ست یاد میشود. اگر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ وکتورهای یک ست $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in IR$ سکالرها باشند در این صورت

$\overrightarrow{a} = \alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + \ .... \ + \alpha_n \overrightarrow{a_n}$ را به نام ترکیبی خطی وکتورهای $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ یاد میکنند.

هرگاه در یک ترکیب خطی $\alpha_1 = \alpha_2 = \ .... \ = \alpha_n = 0$ باشد، وکتورها به صورت خطی مستقل اند و اگر یکی از آنها $\alpha_i \ (i = 1, 2, ..., n)$ خلاف صفر باشد وکتورها به صورت خطی مستقل نمی‌باشند، یعنی به صورت خطی مربوط اند.

در اخیر معلم از مثال 1 صفحهٔ 265 کتاب حاصل ضرب وکتورهای $\overrightarrow{a_1}$ و $\overrightarrow{a_2}$ را به دست آورد و در مرحلهٔ دوم ترکیب خطی وکتورهای نامبرده، به طور خطی مستقل یا به طور خطی مربوط بودن وکتورها را نشان دهد.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم غرض تحکیم بخشیدن درس به شاگردان هدایت دهد تا مثال 2 صفحهٔ 265 کتاب را در کتابچه‌های خود بدون استفاده از کتاب حل کنند. همزمان عین مثال را یک شاگرد داوطلب روی تخته حل کند. در اخیر شاگرد روی تخته، حل خویش را به دیگران توضیح دهد، شاگردان دیگر حل‌های خویش را با آن مقایسه نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

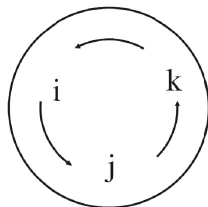
- معلم محترم برای اطمینان خویش، شاگردان را توسط سؤالهای زیر ارزیابی نماید:

1. حاصل ضرب سکالری و وکتوری دو وکتور از هم چه تفاوت دارند؟
2. اگر $\alpha_1 = \alpha_2 = \ .... \ = \alpha_n = 0$ باشد، آیا وکتورها به صورت خطی مستقل اند یا خیر؟
3. اگر یکی از $\alpha_i \ (i = 1, 2, ..., n)$ خلاف صفر باشد، آیا وکتورها به صورت خطی مستقل اند یا خیر؟
4. آیا حاصل ضرب وکتوری دو وکتور یک کمیت وکتوری است یا سکالری؟

- معلم محترم کوشش کند که جوابها را از شاگردان حاصل نماید در صورت مشکلات ایشان را کمک و رهنمایی نماید.

معلومات اضافی برای معلم

برای اینکه در معلومات معلم افزایش به میان آمده باشد، یک بار دیگر برای تشکیل واحد وکتورها ساختمان دایروی را که در کتاب هم آمده است در نظر می گیریم.



حاصل ضرب وکتوری دو وکتور عبارت از وکتور سومی است که بر مبدأ وکتورهای نامبرده عمود باشد؛ یعنی:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \cdot \sin\theta \overrightarrow{n}$$

$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = 0$, $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = 0$ و $\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = 0$ است زیرا:

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = |\overrightarrow{i}| \cdot |\overrightarrow{i}| \cdot \sin 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$
$$\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = |\overrightarrow{j}| \cdot |\overrightarrow{j}| \cdot \sin\theta = 1 \cdot 1 \cdot \sin 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$
$$\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = |\overrightarrow{k}| \cdot |\overrightarrow{k}| \cdot \sin\theta = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

فصل هفتم وکتورها

عنوان درس: ارائه یک وکتور در شکل ترکیب خطی وکتورهای واحد طبیعی

صفحهٔ کتاب (266)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • به مفهوم ارائهٔ یک وکتور در شکل ترکیب خطی وکتور واحدهای طبیعی بدانند. • وکتورهای واحد را در فضای دو بُعدی، سه بُعدی و بالآخره n بُعدی بشناسند. • یک وکتور را به شکل ترکیب خطی وکتورهای واحد نشان بدهند. • با کسب دانش و مهارت فوق احساس مُسرت نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت درس.
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	- معلم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، طور مختصر از درس گذشته یادآوری کند. - معلم از شاگردان بپرسد: • آیا وکتورهای (x_1, x_2, x_3) به شکل ترکیب خطی وکتورهای واحد نشان داده می‌شوند؟ - هرگاه شاگردان از ارائهٔ جواب سؤال فوق عاجز باشند، معلم محترم آن‌ها را کمک و رهنمایی کند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم ضرایب وکتورهای واحد را به شکل یک مجموعه در فضای دو بُعدی، سه بُعدی و بالآخره n بُعدی به شاگردان توضیح نماید.

- معلم محترم عنوان استقلال خطی وکتورها را روی تخته بنویسد و برای شاگردان بگوید که وکتورهای $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ در یک ساحهٔ وکتوری استقلال خطی دارند؛ هرگاه این ترکیب خطی $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$ باشد در این صورت $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ می‌شود؛ سپس عنوان(وکتورهای غیر مستقل) را روی تخته بنویسد و تعریف کند. در اخیر یادداشت را که در مورد مراحل به دست آوردن ست وکتورها که دارای استقلال خطی اند با حل یک مثال توضیح کند.

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 268 را در مشورت باهم انجام دهند. در ختم فعالیت نمایندهٔ یک گروه فعالیت خویش را به نماینده‌گی از گروه خویش به شاگردان توضیح بدهد و در صورت بروز مشکلات معلم محترم آن‌ها را کمک و رهنمایی کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم غرض تحکیم بخشیدن درس مثال 2 صفحهٔ 270 کتاب درسی را به یک شاگرد بدهد تا روی تخته حل کند، همزمان عین مثال را شاگردان دیگر در کتابچه‌های خویش(بدون استفاده از کتاب) حل کنند، در اخیر شاگرد متذکره روی تخته فعالیت انجام شدهٔ خود را به دیگران توضیح کند و شاگردان دیگر حل‌های خود را با آن مقایسه و حل مشکل نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم محترم به خاطر مطمئن شدن از آموزش شاگردان توسط سؤالهای زیر ایشان را ارزیابی کند:

1. یک شاگرد وکتور واحد طبیعی را در فضای سه بُعدی روی تخته بنویسد.
2. یک شاگرد وکتور $\vec{a} = (2,3)$ را به شکل ترکیب خطی وکتورهای واحد طبیعی بنویسد.

معلومات اضافی برای معلم

حل فعالیت صفحهٔ 267 کتاب درسی.

$$S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$
$$\alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,0,1)=0$$
$$(\alpha_1,0,0)+(0,\alpha_2,0)+(0,0,\alpha_3)=0$$
$$(\alpha_1+0+0,\ 0+\alpha_2+0,\ 0+0+\alpha_3)=0$$
$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=0 \Rightarrow \alpha_1=0,\quad \alpha_2=0,\quad \alpha_3=0$$

طوریکه $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ است؛ پس S استقلال خطی دارد.

فصل هفتم وکتورها

عنوان درس: حاصل ضرب مخلوط یا حاصل ضرب سه گانه(*Triple product*)

صفحهٔ کتاب (270)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان قادر شوند تا: • مفهوم حاصل ضرب مخلوط را بدانند. • سؤالهای مربوط حاصل ضرب مخلوط را حل کنند. • با کسب دانش و مهارت فوق احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت درس.
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، با یادآوری از درس گذشته توجه شاگردان را به سؤالهای زیر جلب کند تا برای ایشان تولید انگیزه نماید: • حاصل ضرب $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ وکتور است یا سکالر؟ • آیا افادهٔ $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ با افادهٔ $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ مساوی است یا فرق دارد؟ در صورتی که شاگردان موفق به ارائه جواب نباشند، معلم محترم آن‌ها را کمک و همکاری کند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم عنوان درس(حاصل ضرب مخلوط) را روی تخته بنویسد و تمام حالتهای ضرب دو و یا چند وکتور را برای شاگردان توضیح کند؛ سپس به شاگردان بگوید که ارتباط $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ عبارت از حجم متوازی‌السطوح است، در حالی که وکتور های $\vec{a}$, $\vec{b}$ و $\vec{c}$ اضلاع متوازی‌السطوح می‌باشند.

- معلم محترم عنوان مسائل تطبیقاتی مربوط صفحهٔ 271 کتاب درسی را روی تخته بنویسد و سؤال 2,1 و 3 را به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم غرض تحکیم بخشیدن درس هدایت دهد تا یک شاگرد مثال 4 صفحهٔ 273 کتاب یعنی مساحت متوازی‌الاضلاع را روی تخته با استفاده از شکل حل کند. عین مثال را شاگردان دیگر در کتابچه‌های خویش بدون استفاده از کتاب درسی حل کنند. در اخیر شاگرد روی تخته فعالیت خویش را به دیگران توضیح دهد، بقیه شاگردان حل‌های خویش را با حل مثال روی تخته مقایسه کنند. در صورتی که مرتکب اشتباه شده باشند اشتباه خویش را اصلاح سازند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم محترم برای مطمئن شدن از آموزش شاگردان، ایشان را توسط سؤالهای زیر ارزیابی کند:

1. حاصل ضرب $(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$ یک وکتوری است یا سکالر؟
2. یک شاگرد $\sin(\alpha+\beta)$ را روی تخته انکشاف دهد.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 274

1- اگر $a_1 = t^2+t+2$, $a_2 = 2t^2+t$ و $a_3 = 3t^2+2t+2$ باشند نشان دهید که وکتور های مذکور به صورت خطی مستقل نیستند.

حل:

$$\alpha\overrightarrow{a_1}+\beta\overrightarrow{a_2}+\gamma\overrightarrow{a_3} = \alpha(t^2+t+2)+\beta(2t^2+t)+\gamma(3t^2+2t+2)=0$$
$$=\alpha t^2+\alpha t+2\alpha+2\beta t^2+\beta t+3\gamma t^2+2\gamma t+2\gamma=0$$
$$=(\alpha+2\beta+3\gamma)t^2+(\alpha+\beta+2\gamma)t+2\alpha+2\gamma=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0\\ \alpha+\beta+2\gamma=0\\ 2\alpha+2\gamma=0 \qquad \Rightarrow\ 2\alpha+2\gamma=0\ \Rightarrow\ \boxed{\alpha=-\gamma}\end{cases}$$
$$\alpha+\beta+2\gamma=0\ \Rightarrow\ -\gamma+\beta+2\gamma=0\ \Rightarrow\ \beta+\gamma=0\ \Rightarrow\ \boxed{\beta=-\gamma}$$
$$\Rightarrow\ \boxed{\alpha=\beta=-\gamma}$$

پس برای تمام قیمت‌های $\alpha=\beta=-\gamma$ ترکیب خطی فوق صدق می‌کند و برای α,β و γ قیمت‌های خلاف صفر هم موجود است؛ پس در نتیجه وکتورهای نامبرده به صورت خطی مستقل نیستند.

2- نشان دهید که وکتورهای $\vec{a}=2i+3j+4k$, $\vec{b}=4i+6j+8k$ با همدیگر ارتباط خطی دارند.

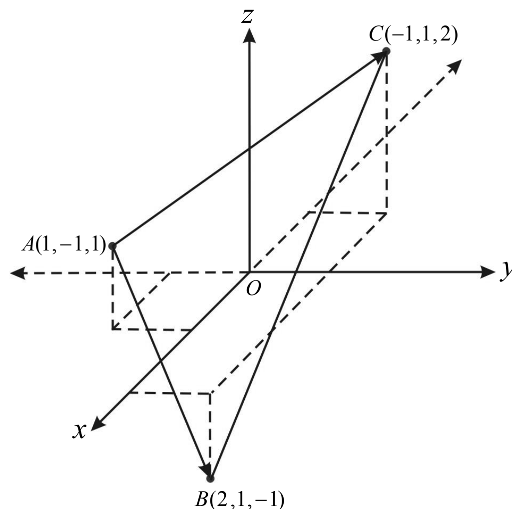
حل:

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\alpha(2i+3j+4k)+\beta(4i+6j+8k)$$
$$=2\alpha i+3\alpha j+4\alpha k+4\beta i+6\beta j+8\beta k=0$$
$$=(2\alpha+4\beta)i+(3\alpha+6\beta)j+(4\alpha+8\beta)k=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases}2\alpha+4\beta=0\\ 3\alpha+6\beta=0\\ 4\alpha+8\beta=0\end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta=0\\ \alpha+2\beta=0\\ \alpha+2\beta=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\ \alpha=-2\beta$$

پس در نتیجه برای تمام قیمت‌های $\alpha=-2\beta$ ترکیبی خطی فوق صدق میکند و برای α و β قیمت‌های خلاف صفر هم موجود است؛ بنا بر آن وکتورها $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ارتباط خطی دارند.

3- مساحت مثلثی را دریافت نمایید که رأس های آن توسط وکتورهای $A(1,-1,1)$، $B(2,1,-1)$ و $C(-1,1,2)$ مشخص شده باشند؛ همچنان مطلوب است وکتور واحدی که بالای مستوی ABC عمود باشد.

حل:



$$\overrightarrow{AB}=(2-1,1-(-1),-1-1)=(1,2,-2)=i+2j-2k$$

$$\overrightarrow{AC}=(-1-1,1-(-1),2-1)=(-2,2,1)=-2i+2j+k$$

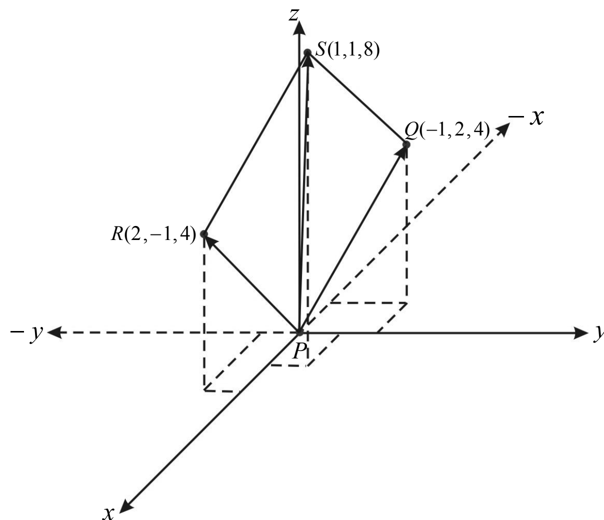
$$A(\overset{\Delta}{ABC})=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|(i+2j-2k)\times(-2i+2j+k)\right|=\frac{1}{2}\left|2k-j+4k+2i+4j+4i\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|6i+3j+6k\right|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+3^2+6^2}=\frac{1}{2}\sqrt{36+9+36}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{81}\quad\Rightarrow\quad\boxed{A(\overset{\Delta}{ABC})=\frac{1}{2}\sqrt{81}=\frac{1}{2}\cdot 9=4.5unit^2}$$

4- مساحت متوازی الاضلاعی را دریافت کنید که توسط وکتورهای $P(0,0,0)$, $Q(-1,2.4)$، $R(2,-1,4)$ و $S(1,1,8)$ مشخص شده باشد.

حل:



$$\overrightarrow{PQ} = (-1-0, 2-0, 4-0) = (-1, 2, 4) = -i + 2j + 4k$$
$$\overrightarrow{PR} = (2-0, -1-0, 4-0) = (2, -1, 4) = 2i - j + 4k$$
$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= i(8+4) - j(-4-8) + k(1-4) = 12i + 12j - 3k$$
$$\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{12^2 + 12^2 + (-3)^2} = \sqrt{144+144+9} = \sqrt{297} = 3\sqrt{33}$$

مساحت متوازی‌الاضلاع $= 3\sqrt{33}$

5- اگر $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ، $\vec{v} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ باشد، حاصل ضرب های وکتوری زیر را دریافت کنید.

$i)\ \vec{u} \times \vec{u}$ $\qquad ii)\ \vec{u} \times \vec{v}$ $\qquad iii)\ \vec{v} \times \vec{u}$

حل:

$$i)\ \vec{u} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1+1)i - (2-2)j + (-2+2)k = 0$$

$$ii)\ \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1-2)i - (-2-4)j + (4+4)k = -i + 6j + 8k$$

$$iii)\ \vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2-1)i - (4+2)j + (-4-4)k = i - 6j - 8k = -(-i + 6j + 8k)$$
$$= -\vec{u} \times \vec{v}$$

حل تمرینات عمومی فصل هفتم(8 ساعت درسی)

1): اگر $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ و $\vec{b}=4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ باشد مطلوب است:

a): $\vec{a}\cdot\vec{b}$ b): $\vec{a}\times\vec{b}$

حل:

$$a)\ \vec{a}\cdot\vec{b}=(3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k})(4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k})=3\cdot4+(-1)(3)+(5)(-2)$$
$$=12-3-10=12-13=-1$$

$$b)\ \vec{a}\times\vec{b}=(3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k})\times(4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k})=((-1)\cdot(-2)-5\cdot3)\,\vec{i}-(3(-2)-5\cdot4)\,\vec{j}+(3\cdot3-4(-1))\,\vec{k}$$
$$=(2-15)\,\vec{i}-(-6-20)\,\vec{j}+(9+4)\,\vec{k}=-13\,\vec{i}+26\,\vec{j}+13\,\vec{k}$$

2): هرگاه نقاط $P(2,3)$ و $Q(6_1-2)$ انجام های وکتور شعاع های $\vec{OP}$ و $\vec{OQ}$ باشند، در این صورت وکتور $\vec{PQ}$ را به شکل $xi+yj$ در مستوی بنویسید.

حل:

$$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=2\vec{i}+3\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=6\vec{i}-2\vec{j}$$

3): حاصل جمع وکتورهای $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ مطلوب است، در صورتی که $A(1,-1)$، $B(2,0)$، $C(-1,3)$ و $D(-2,2)$ داده شده باشند.

حل:

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2-1\\0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\vec{i}+\vec{j}$$
$$\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}-2+1\\2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}$$
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{i}-\vec{j}=0$$

4): هرگاه $A=(2,5)$ ، $B=(-1,1)$ و $C=(2,-6)$ داده شده باشند؛ مطلوب است:

$i)\ \vec{AB}=?$ $ii)\ 2\vec{AB}-\vec{CB}=?$ $iii)\ 2\vec{CB}-2\vec{CA}=?$

حل:

$$i)\ \overrightarrow{AB}=(-1-2,1-5)=(-3,-4)=-3\vec{i}-4\vec{j}$$
$$ii)\ \overrightarrow{CB}=(-1-2,1+6)=-3\vec{i}+7\vec{j}$$
$$2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=2(-3\vec{i}-4\vec{j})-(-3\vec{i}+7\vec{j})=-6\vec{i}-8\vec{j}+3\vec{i}-7\vec{j}=-3\vec{i}-15\vec{j}$$
$$iii)\ \overrightarrow{CA}=(2-2,5+6)=(0,-11)=+11\vec{j}\quad\Rightarrow\ 2\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{CA}=2(-3\vec{i}+7\vec{j})-2(11\vec{j})$$
$$=-6\vec{i}+14\vec{j}-22j=-6\vec{i}-8\vec{j}\quad\Rightarrow\ 2\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{CA}=-6\vec{i}-8\vec{j}$$

5): هرگاه $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ و $v=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ و $\vec{w}=5\vec{i}-j+3\vec{k}$ را داده شده باشد مطلوب است.

$i):\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$ $\qquad ii):\ \vec{v}-3\vec{w}$ $\qquad iii):\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

حل:

$$i)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})+2(3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k})+5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$$
$$=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}+6\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}+5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$$
$$=(1+6+5)\vec{i}+(2-4-1)\vec{j}+(-1+4+3)\vec{k}=12\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$$
$$\boxed{\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=12\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}}$$

$$ii)\ \vec{v}-3\vec{w}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}-3(5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k})=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}-15\vec{i}+3\vec{j}-9\vec{k}$$
$$=-12\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k}$$
$$\boxed{\vec{v}-3\vec{w}=-12\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k}}$$

$$iii)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=\left|3(3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k})+5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\right|=\left|9\vec{i}-6\vec{j}+6\vec{k}+5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\right|$$
$$=\left|14\vec{i}-7\vec{j}+9\vec{k}\right|=\sqrt{14^2+(-7)^2+9^2}=\sqrt{196+49+81}=\sqrt{326}$$
$$\boxed{\left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=\sqrt{326}}$$

iv) : وکتور واحدهای هم جهت وکتورهای داده شده $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ را دریافت کنید.

$$\vec{e_u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}$$
$$\vec{e_v}=\frac{3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{3^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{9+4+4}}=\frac{3}{\sqrt{17}}\vec{i}-\frac{2}{\sqrt{17}}\vec{j}-\frac{2}{\sqrt{17}}\vec{k}$$
$$\vec{e_w}=\frac{5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}}{\sqrt{5^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}}{\sqrt{25+1+9}}=\frac{5}{\sqrt{35}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{35}}\vec{j}+\frac{3}{\sqrt{35}}\vec{k}$$

6): برای وکتورهای داده شده $\vec{a}$ و $\vec{b}$ حاصل ضرب های سکالری $\vec{a}\cdot\vec{b}$، $\vec{b}\cdot\vec{a}$ و حاصل ضرب های وکتوری $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{b}\times\vec{a}$ را به دست آورده دوبه دو باهم مقایسه کنید هرگاه a و b طور زیر داده شده باشند:

$$i)\ \begin{cases}\vec{a}=2i+j-k\\ \vec{b}=i-j+k\end{cases}\qquad ii)\ \begin{cases}a=i+j\\ b=i-j\end{cases}$$

$$iii)\ \begin{cases}\vec{a}=3i-2j+k\\ \vec{b}=i+j\end{cases}\qquad iv)\ \begin{cases}\vec{a}=-4i+j-2k\\ \vec{b}=2i+j+k\end{cases}$$

حل:

$$i)\ \vec{a}\cdot\vec{b}=(2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=2(i\cdot i)-j\cdot j-k\cdot k=2-1-1=0$$

$$\vec{b}\cdot\vec{a}=(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})(2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})=2-1-1=0 \quad\Rightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})\times(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=2i\times i-2i\times j+2i\times k+j\times i-j\times j+j\times k-k\times i+k\times j-k\times k$$

$$=2\cdot 0-2k-2j-k-0+i-j-i-0=-3j-3k \quad\Rightarrow\ \vec{a}\times\vec{b}=-3j-3k$$

$$\vec{b}\times\vec{a}=(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\times(2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})=2i\times i+i\times j-i\times k-j\times 2i-j\times j+j\times k+k\times 2i+k\times j-k\times k$$

$$=0+k+j+2k-0+i+2j-i-0=3j+3k \quad\Rightarrow\ \vec{b}\times\vec{a}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

$$ii)\ \vec{a}\cdot\vec{b}=(i+j)(i-j)=i\cdot i-j\cdot j=1-1=0$$

$$\vec{b}\cdot\vec{a}=(i-j)(i+j)=i\cdot i-j\cdot j=1-1=0 \quad \boxed{\Rightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(i+j)\times(i-j)=i\times i-i\times j+j\times i-j\times j=0-k-k+0=-2k$$

$$\vec{b}\times\vec{a}=(i-j)\times(i+j)=i\times i+i\times j-j\times i-j\times j=0+k+k=2k \quad \boxed{\Rightarrow\ \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}}$$

$$iii)\ \vec{a}\cdot\vec{b}=(3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})(i+j)=3i\cdot i+3i\cdot j-2j\cdot i-2j\cdot j+k\cdot i+k\cdot j=3-2=1 \quad\Rightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1$$

$$\vec{b}\cdot\vec{a}=(i+j)(3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})=i\cdot 3i-i\cdot 2j+i\cdot k+j\cdot 3i-j\cdot 2j+j\cdot k=3-0+0+3\cdot 0-2+0$$

$$=3-2=1 \quad\Rightarrow\ \vec{b}\cdot\vec{a}=1 \quad \boxed{\Rightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})\times(i+j)=3i\times i+3i\times j-2j\times i-2j\times j+k\times i+k\times j$$

$$=3\cdot 0+3k+2k-2\cdot 0+j-i=-i+j+5k$$

$$\vec{b}\times\vec{a}=(i+j)\times(3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})=3i\times i-2i\times j+i\times k+3j\times i-2j\times j+j\times k$$

$$=0-2k-j-3k-2\cdot 0+j=i-j-5k=-(-i+j+5k) \quad \boxed{\Rightarrow\ \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}}$$

$$vi)\ \vec{a}\cdot\vec{b}=(-4\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$

$$=-4\cdot 2i\cdot i-4i\cdot j-4i\cdot k+2j\cdot i+j\cdot j+j\cdot k-2\cdot 2k\cdot i-2k\cdot j-2k\cdot k$$

$$=-8-4\cdot 0-4\cdot 0+2\cdot 0+1+0-4\cdot 0-2\cdot 0-2\cdot 1=-8+1-2=-9 \quad\Rightarrow\ \boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=-9}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{a}=(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})(-4\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})=-2\cdot 4+1-2\cdot 1=-8+1-2=-9 \quad\Rightarrow\ \boxed{\vec{b}\cdot\vec{a}=-9}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(-4\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})\times(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$

$$=-4i\times 2i-4i\times j-4i\times k+j\times 2i+j\times j+j\times k-2k\times 2i-2k\times j-2k\times k$$

$$=0-4k-4(-j)-2k+0+i-4j-2(-i)+0=-4k+4j-2k+i-4j+2i=3i-6k$$

$$\vec{b}\times\vec{a}=(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\times(-4\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})$$

$$=2i\times(-4i)+2i\times j+2i\times(-2k)+j\times(-4i)+j\times j+j\times(-2k)+k\times j+k\times(-2k)$$

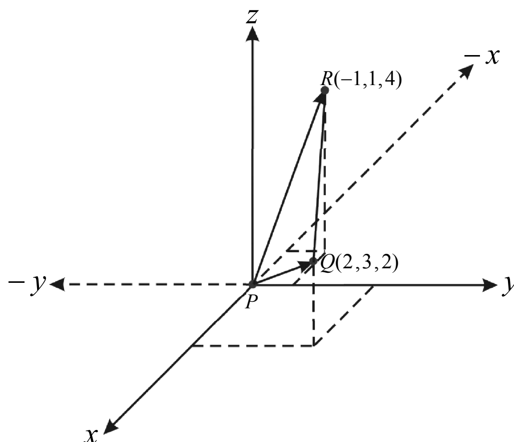
$$=0+2k+4j+4k+0-2i-4j-i+0=-3i+6k=-(3i-6k) \quad \boxed{\Rightarrow\ \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}}$$

7): مساحت مثلث های که رأس ها توسط نقاط زیر مشخص می شوند؛ مطلوب است:

$i):\quad P(0,0,0),\quad Q(2,3,2),\quad R(-1,1,4)$

$ii):\quad P(1,-1,-1),\quad Q(2,0,-1),\quad R(0,2,1)$

حل $i)$:



$$\overrightarrow{PQ}=(2-0,3-0,2-0)=(2,3,2)=2i+3j+2k$$

$$\overrightarrow{QR}=(-1-2,1-3,4-2)=(-3,-2,2)=-3i-2j+2k$$

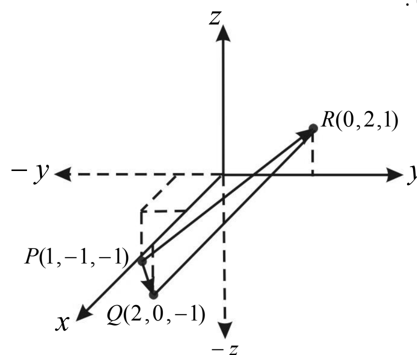
$$A(P\overset{\Delta}{Q}R)=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}\right|=\frac{1}{2}\left|(2i+3j+2k)\times(-3i-2j+2k)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|-4k-4j+9k+6i-6j+4i\right|=\frac{1}{2}\left|10i-10j+5k\right|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{10^2+(-10)^2+5^2}=\frac{1}{2}\sqrt{100+100+25}=\frac{1}{2}\sqrt{225}$$

$$A(P\overset{\Delta}{Q}R)=\frac{15}{2}$$

حل $ii)$:



$$\overrightarrow{PQ}=(2-1,0-(-1),-1-(-1)=(1,1,0)=i+j$$

$$\overrightarrow{PQ}=i+j$$

$$\overrightarrow{PR}=(0-1,2-(-1),1-(-1)=(-1,3,2)$$

$$\overrightarrow{PR}=-i+3j+2k$$

$$A(P\overset{\Delta}{Q}R)=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|=\frac{1}{2}\left|(i+j)\times(-i+3j+2k)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|3k-2j+k+2i\right|=\frac{1}{2}\left|2i-2j+4k\right|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-2)^2+4^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4+4+16}=\frac{1}{2}\sqrt{24}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{6}=\sqrt{6}$$

$$A(P\overset{\Delta}{Q}R)=\sqrt{6}$$

8): مساحت متوازی الاضلاعی که رأس های آن توسط نقاط زیر مشخص میشود؛ مطلوب است:

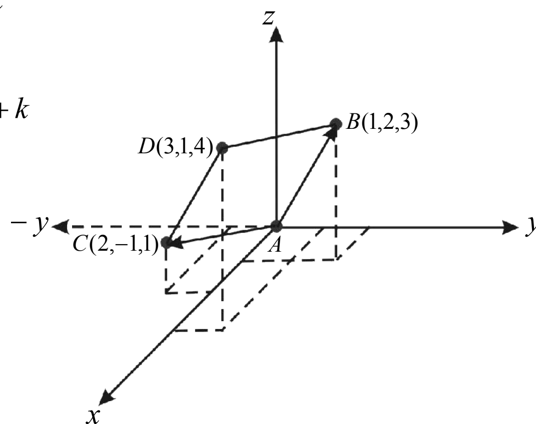
$i)\quad A(0,0,0),\quad B(1,2,3),\quad C(2,-1,1),\quad D(3,1,4)$

$ii)\quad A(1,2,-1),\quad B(4,2,-3),\quad C(6,-5,2),\quad D(9,-5,0)$

$iii)\quad A(-1,1,1),\quad B(-1,2,2),\quad C(-3,4,-5),\quad D(-3,5,-4)$

حل $i)$:

$$\overrightarrow{AB}=(1-0,2-0,3-0)=(1,2,3)=i+2j+3k$$
$$\overrightarrow{AB}=i+2j+3k$$
$$\overrightarrow{AC}=(2-0,-1-0,1-0)=(2,-1,1)=2i-j+k$$
$$\overrightarrow{AC}=2i-j+k$$

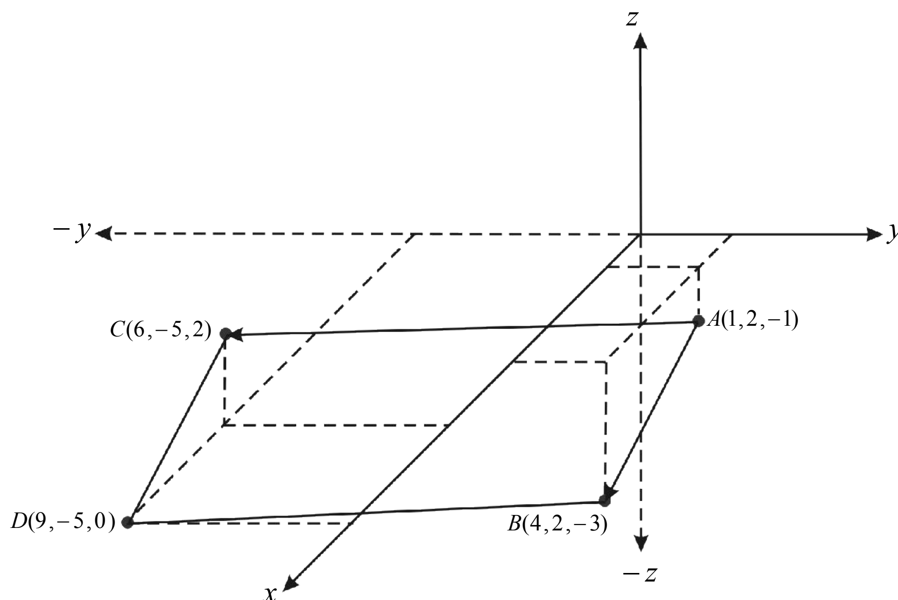


مساحت متوازی‌الاضلاع $= A = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \left|(i+2j+3k)\times(2i-j+k)\right|$

$$=\left|-k-j-4k+2i+6j+3i\right|=\left|5i+5j-5k\right|$$
$$=\sqrt{5^2+5^2(-5)^2}=\sqrt{25+25+25}$$

مساحت متوازی‌الاضلاع $A=\sqrt{75}$

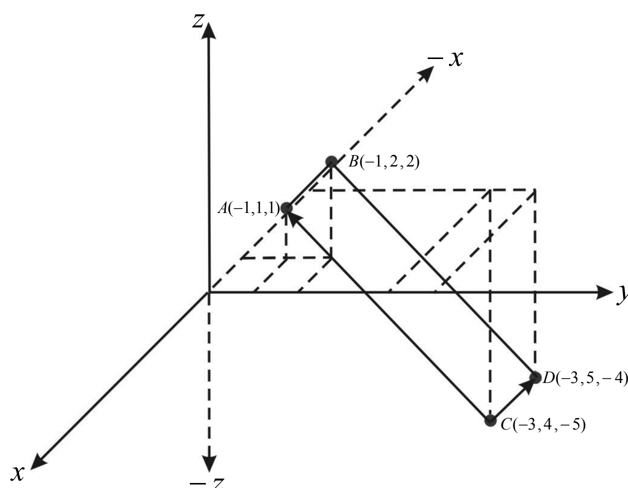
حل $ii)$:



$$\overrightarrow{AB} = (4-1, 2-2, -3-(-1)) = (3, 0, -2) = 3i - 2k$$
$$\overrightarrow{AC} = (6-1, -5-2, 2-(-1)) = 5, -7, 3 = 5i - 7j + 3k$$
$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left|(3i-2k)\times(5i-7j+3k)\right| = \left|15i\times i - 21i\times j + 9i\times k - 10k\times i + 14k\times j - 6k\times k\right|$$
$$= \left|0 - 21k - 9j - 10j - 14i - 0\right| = \left|-14i - 19j - 21k\right|$$
$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-14)^2 + (-19)^2 + (-21)^2} = \sqrt{196 + 361 + 441} = \sqrt{998} = 31.591$$

مساحت متوازی‌الاضلاع $= 31.591$

حل iii):



$$\overrightarrow{CD} = (-3-(3), 4-5, -5-(-4)) = (0, 1, -1) = j - k$$
$$\overrightarrow{CA} = (-3-(-1), 4-1, -5-1) = (-2, 3, -6) = -2i + 3j - 6k$$
$$\left|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CD}\right| = \left|(-2i + 3j - 6k)\times(j-k)\right|$$
$$= \left|-2k + 2(-j) + 3\times 0 - 3j - 6(-i) + 6\times 0\right| = \left|6i - 5j - 2k\right|$$
$$= \sqrt{6^2 + (-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36 + 25 + 4}$$
$$= \sqrt{65} = 8.062$$

مساحت متوازی‌الاضلاع $= 8.062\,unit^2$

9): کدام وکتورها باهم عمود و کدام شان باهم موازی اند:

$i)\quad \vec{u} = 5i - j + k,\quad \vec{v} = j - 5k,\quad \vec{w} = -15i + 3j - 3k$

$ii)\quad \vec{u} = i + 2j - k\ ,\quad \vec{v} = i + j + k,\quad \vec{w} = -\frac{\pi}{2}\vec{i} + \frac{\pi}{2}\vec{j}$

میدانیم که حاصل ضرب سکالری دو وکتور $\vec{u}$ و $\vec{v}$ عبارت است از:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

حال اگر $\cos\theta=\pm1$ باشد، وکتورهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ باهم موازی و اگر $\cos\theta=0$ باشد، وکتورها بایکدیگر عمود اند.

حل i): تمام وکتورها را دو به دو تحت مطالعه قرار می‌دهیم:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

$$\cos\theta=\frac{(5i-j+k)(j-5k)}{\sqrt{5^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+(-5)^2}}=\frac{-1-5}{\sqrt{25+1+1}\sqrt{1+25}}$$

$$=\frac{-6}{\sqrt{27\cdot26}}=\frac{-6}{26.49}=-0.226 \Rightarrow \cos\theta=-0.226$$

بنا بر این وکتورهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نه باهم عمود اند، نه موازی.

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|}$$

$$\cos\theta=\frac{(5i-j+k)(-15i+3j-3k)}{\sqrt{5^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{(-15)^2+3^2+(-3)^2}}=\frac{-75-3-3}{\sqrt{27}\sqrt{243}}=\frac{-81}{\sqrt{27\cdot243}}$$

$$=\frac{-81}{\sqrt{6561}}=\frac{-81}{81}=-1 \Rightarrow \cos\theta=-1$$

چون $\cos\theta=-1$ است؛ وکتورهای $\vec{u}$ و $\vec{w}$ با هم موازی، ولی جهت‌های شان مخالف یکدیگر می‌باشند.

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}$$

$$\cos\theta=\frac{(j-5k)(-15i+3j-3k)}{\sqrt{1+(-5)^2}\sqrt{(-15)^2+3^2+(-3)^2}}=\frac{3+15}{\sqrt{26}\sqrt{243}}=\frac{18}{\sqrt{26\cdot243}}$$

$$=\frac{18}{\sqrt{6381}}=\frac{18}{97.485}=0.2265 \Rightarrow \cos\theta=0.2265$$

پس وکتورهای $\vec{v}$ و $\vec{w}$ نه موازی اند و نه عمود.

حل ii):

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

$$\cos\theta=\frac{(i+2j-k)(i+j+k)}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1+2-1}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{1+1+1}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{6\cdot3}}=\frac{2}{\sqrt{18}}=\frac{2}{4.242}=0.4715 \Rightarrow \cos\theta=0.4715$$

چون $\cos\theta = 0.4715$ است؛ بنا بر این وکتورهای $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ نه موازی و نه عمود اند.

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|}$$

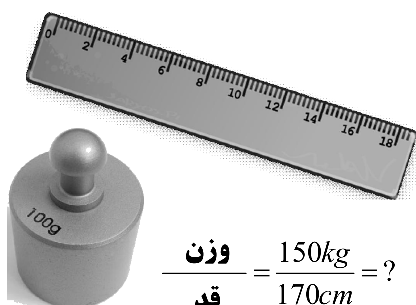
$$\cos\theta=\frac{(i+2j-k)(-\frac{\pi}{2}i+\frac{\pi}{2}j)}{\sqrt{6}\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{4}}}=\frac{-\frac{\pi}{2}+\pi}{\sqrt{6}\sqrt{\frac{\pi^2}{2}}}=\frac{-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{6\cdot\frac{\pi^2}{2}}}=\frac{-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{3\pi^2}}=\frac{-\frac{\pi}{2}}{\pi\sqrt{3}}=\frac{-1}{2\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta=\frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

پس $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{w}$ نه عمود و نه موازی می‌باشند.

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}$$

$$\cos\theta=\frac{(i+j+k)(-\frac{\pi}{2}i+\frac{\pi}{2}j)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{4}}}=\frac{-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{\pi^2}{2}}}=\frac{0}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{\pi^2}{2}}} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta=0$$

چون $\cos\theta = 0$ است؛ پس وکتورهای $\overrightarrow{v}$ و $\overrightarrow{w}$ باهم عمود اند.



$$\frac{\text{وزن}}{\text{قد}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

فصل هشتم احصائیه

عنوان درس: ضریب تغییرات

صفحهٔ کتاب (281-282)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان بتوانند تا: • به مفهوم ضریب تغییرات بفهمند. • ضریب تغییرات یک جامعه را پیدا کنند. • از محاسبهٔ ضریب تغییرات در زنده‌گی روزمره استفاده کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیتهای مقدماتی، توجه شاگردان را به سؤال ورودی معطوف دارد و سؤال کند: • کی میتواند بگوید: هرگاه اندازهٔ یک جامعه به متر و اندازهٔ یک جامعهٔ دیگر به کیلوگرام تعیین شده باشد، آیا این دو جامعه قابل مقایسه اند؟ • کی میتواند بگوید: دو جامعه چی وقت قابل مقایسه می باشند؟ همین قسم معلم در مورد شکل ورودی معلومات بخواهد و کوشش نماید تا جواب از شاگردان به دست آورده شود.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم یک شاگرد داوطلب را وظیفه دهد تا ده نفر شاگردان را بدون پیش بینی قبلی طور دقیق انتخاب کند. همین قسم معلم محترم یک شاگرد دیگر را بخواهد تا اندازهٔ قد و وزن ده شاگرد را بپرسد و روی تخته بنویسد.
- معلم محترم از شاگردان بپرسد: کی میتواند با استفاد از دیتای روی تخته اوسط و انحراف معیاری به دست بیاورد؟ در صورتیکه شاگردی حاضر شود معلم محترم اجازه دهد تا اوسط و انحراف معیاری را به دست آورد، در غیر آن معلم محترم اوسط و انحراف معیاری دیتای مذکور را به دست بیاورد وشاگردان حل‌های خویش را با آن مقایسه نمایند. در ختم فعالیت معلم ضریب تغییرات را که به CV نشان داده می‌شود برایشان تعریف نماید، طوری‌که عبارت از نسبتی است که از تقسیم نمودن انحراف معیاری و اوسط به دست می‌آید و دارای واحد نیست که برای مقایسهٔ دو جامعهٔ متجانس به کار می‌رود. شکل سمبولیک آن را که عبارت از $C \cdot V = \frac{S}{\overline{X}}$ است روی تخته بنویسد و از اوسط و انحراف معیاری که از دیتای به دست آمده حاصل می‌شود

نسبت را به دست بیاورد.

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 281 کتاب را بعد از بحث و مذاکره انجام دهند و در ختم یک یا دو نمایندهٔ گروه‌ها، فعالیت گروهی خویش را به دیگران توضیح دهند، در صورت موجودیت مشکل، معلم کمک و رهنمایی کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

معلم برای تحکیم بخشیدن درس مثال اول صفحهٔ 282 کتاب را توسط یک شاگرد روی تخته حل کند، همزمان شاگردان دیگر عین مثال را بدون استفاده از کتاب درسی به کتابچه‌های خویش حل نمایند. در اخیر حل‌های خویش را به حل مثال روی تخته مقایسه نمایند. دقت شود که شاگردان اوسط و انحراف معیاری را طور صحیح به دست آورده اند یا خیر؟ در صورت موجودیت مشکل نزد شاگردان، معلم کمک نماید.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم محترم غرض اطمینان از آموزش شاگردان در ارتباط موضوع سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد، کوشش شود تا جواب درست از شاگردان به دست بیاورد:

1. ضریب تغییرات یک جامعه چی مفهوم دارد؟
2. هرگاه ضریب تغییرات یک جامعه زیاد باشد آن به چه معنی است؟
3. هرگاه تمام دیتاها با هم مساوی باشد، ضریب تغییرات مساوی به چند می‌باشد؟

معلومات اضافی برای معلم

معلم محترم فارمولی‌که برای ضریب تغییرات در کتاب درسی نوشته شده است، دو مثال به ارتباط آن نیز حل شده است؛ هرگاه دیتا به شکل یک جدول فریکونسی داده شده باشد و یا شاگردان سؤال کنند که ضریب تغییرات را چگونه محاسبه می‌توان کرد؟ برای جواب دادن به این سؤال فارمول ضریب تغییرات یعنی $C\cdot V=\frac{S}{\overline{X}}$ را در نظر بگیرد که در آن S انحراف معیاری $\overline{x}$ اوسط را نشان میدهد.

اوسط جدول فریکونیسی از فارمول $\overline{x}=\frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$ به دست می‌آید که در آن x_i دیتاها و f_i فریکونسی مربوط را نشان میدهد، یا به عبارت دیگر: $\overline{x}=\frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}=\frac{x_1 f_1+x_2 f_2+\ \dots\ +x_n f_n}{f_1+f_2+\ \dots\ +f_n}$ و انحراف معیاری جدول فریکونسی را با فارمول $S=\sqrt{\frac{f_1(x_1-\overline{x})^2+f_2(x_2-\overline{x})^2+\ \dots\ +f_n(x_n-\overline{x})^2}{f_i+f_2+\ \dots\ +f_n}}=\sqrt{\frac{\sum f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum f_i}}$ محاسبه می‌کنیم و بعد از محاسبه، ضریب تغییرات را به واسطهٔ فارمول $C\cdot V=\frac{S}{\overline{X}}$ به دست می‌آوریم.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 282

1- ضریب تغییرات دیتا های زیر را حساب کنید:

$$1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

حل: می‌دانیم که ضریب تغییرات از فارمول $C\cdot V=\frac{S}{\overline{X}}$ به دست می‌آید و در آن S انحراف معیاری و $\overline{x}$ اوسط را نشان میدهد.

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+3+4+5+6}{5}=\frac{19}{5}=3\frac{4}{5}=3.8$$

$$S^2=\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n}=\frac{(1-3.8)^2+(3-3.8)^2+(4-3.8)^2+(5-3.8)^2+(6-3.8)^2}{5}$$

$$S^2=\frac{(-2.8)^2+(-0.8)^2+(0.2)^2+(1.2)^2+(2.2)^2}{5}=\frac{7.84+0.64+0.04+1.44+4.84}{5}=\frac{14.8}{5}$$

$$S^2=2.96 \quad \Rightarrow \; S=\sqrt{2.96}$$

$$C\cdot V=\frac{S}{\overline{x}}=\frac{\sqrt{2.96}}{3.8}=\frac{1.72}{3.8}=0.452$$

هر گاه ضریب تغییرات ضرب 100 شود ضریب تحول به دست می‌آید.

$$C\cdot V=\frac{\sqrt{2.96}}{3.8}\cdot 100=0.452\cdot 100=45.2\%$$

2- اگر اوسط برابر 4 و انحراف معیاری برابر 6 باشد، ضریب تغییرات چقدر است؟

حل:

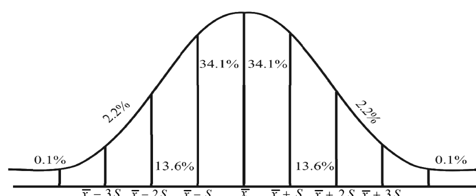
$$\left.\begin{array}{l}\overline{x}=4\\ S=6\\ C\cdot V=?\end{array}\right\}$$

ضریب تغییرات $C\cdot V=\frac{S}{\overline{x}}$

ضریب تغییرات $C\cdot V=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}=1.5$

3- ضریب تغییرات سن شاگردان صنف شما 10 سال بعد چقدر تغییر می کند؟ کم تر می‌شود یا بیشتر؟

حل: طوری‌که تعداد شاگردان تغییر نمی کند و سن شان بلند می‌رود این بدان معنا است که اوسط آن زیاد می‌شود؛ بنابرآن ضریب تغییرات کم می‌شود.



فصل هشتم احصائیه

عنوان درس: پراکنده‌گی منحنی نورمال

صفحهٔ کتاب (283-284)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان بتوانند تا: • مفهوم پراکنده‌گی منحنی نورمال را بفهمند. • منحنی نورمال را از منحنی غیر نورمال فرق نمایند. • با کسب دانش و مهارت فوق اعتماد به خود پیدا کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، توجه شاگردان را به بخش ورودی کتاب جلب و فیصدی توزیع دیتا را در انتروالهای مختلف منحنی نورمال معرفی و سؤال کند که: • اگر تمام توزیع دیتا به شکل منحنی نورمال باشد چقدر دیتا در انتروال $(\bar{x}-S,\bar{x}+S)$ و چند فیصد دیتا در انتروال $(x-2S,\bar{x}+2S)$ واقع می‌باشد؟ کوشش شود تا شاگردان جواب بگویند، در غیر آن معلم محترم آن‌ها را کمک و رهنمایی کند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند و گراف تادیهٔ حقوق شرکت‌های A و B(صفحهٔ 283 کتاب) را به صورت جداگانه روی تخته رسم کند و از شاگردان بخواهد تا هر گروه به رویت گراف در مورد تادیهٔ حقوق شرکت‌ها بحث نمایند و بگویند که در قسمت تادیهٔ حقوق کدام شرکت پراگنده‌گی وجود دارد؟ بعد نمایندهٔ یک یا دو گروه فعالیت گروهی، گروه خویش را به دیگران توضیح کنند. درصورت داشتن مشکل، معلم محترم کمک و رهنمایی کند. نظر به اهمیت موضوع معلم در مورد توزیع نورمال قدم به قدم توضیحات مکمل بدهد؛ طوری‌که اگر تمام دیتاهای جمع آوری شده یک جامعه را به شکل یک منحنی نشان دهیم منحنی مذکور کدام شکل را به خود اختیار می‌کند و حالت منحنی نورمال در مورد دیتا کدام معلومات را به دسترس ما قرار می‌دهد.
- معلم دو شاگرد داوطلب را بخواهد تا بالترتیب اجزای اول و دوم صفحهٔ 284 کتاب روی تخته حل کند. شاگردان دیگر عین اجزای مثال(بدون استفاده از کتاب) را در کتابچه‌های خویش حل نمایند و با حل روی تخته مقایسه نمایند. در صورت داشتن مشکل یک شاگرد داوطلب به اصلاح اشتباهات بپردازد.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم برای تحکیم بخشیدن درس فعالیت صفحهٔ 283 کتاب را طور زیر به شاگردان بدهد تا در کتابچه‌های خود حل کنند:

1. کدام شرکت به طور اوسط تادیهٔ حقوق زیاد دارد؟
2. کدام شرکت در میزان تادیهٔ حقوق کارگران خود پراگنده‌گی کم دارد؟
3. تادیات حقوق هر دو شرکت را باهم مقایسه کنید.

- معلم از کار شاگردان نظارت کند و در اخیر شاگرد داوطلب سؤالهای فوق را روی تخته حل کند و شاگردان دیگر حل‌های خود را با آن مقایسه نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

معلم محترم برای مطمئن شدن از آموزش شاگردان سؤالهای زیر را از شاگردان بپرسد و کوشش کند تا جوابهای صحیح از ایشان دریافت نماید:

1. در انتروال $(\bar{x}-S,\bar{x}+S)$ توزیع منحنی نورمال چند فیصد دیتا واقع است؟
2. آن دیتایی که به اندازهٔ $3S$ از اوسط فاصله دارد به نام کدام نوع دیتا یاد می‌شود؟

معلومات اضافی برای معلم

معلم محترم! دانشمندان منحنی نارمل را به شکل مودل پذیرفته اند و از نتیجهٔ مشاهدهٔ یک واقعهٔ تصادفی قانون خطاها را انکشاف داده اند در مرحلهٔ اول قانون خطاها را محض به شکل یک مجموع عمومیات که در اکثر موارد و حادثات صدق می‌کرد مورد پذیرش قرار داده بودند؛ تقریباً دو صد سال قبل Abraham Demoiver(1667-1745م) معادلهٔ منحنی نارمل را استخراج کردند و قانون خطاها را به شکل ریاضی تعریف کردند.

معادلهٔ منحنی نارمل: تحقیق رابطه میان متحولین در واقع موضوع اساسی فعالیت‌های علمی می‌باشد و هر تابع این قسم رابطه را افاده می‌کند.

میدانیم که یک تابع معمولاً به شکل $y=f(x)$ ارائه می‌شود و این فارمول نشان میدهد که y یک تابع از x است. گراف منحنی نارمل در ریاضی یک تابع مغلق است که یک صنفی از منحنی‌ها را تشکیل می‌دهد و تعداد شان بی‌نهایت زیاد بوده که به قیمت‌های اوسط حسابی و انحراف معیاری تعیین می‌شود. معادلهٔ منحنی نارمل اینست

$$y=\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2S^2}}$$

در تابع مذکور:

y : ارتفاع منحنی را ارائه می‌کند، که به قیمت معین x مطابقت می‌کند.

x : یک عدد یا رقم(نمرهٔ امتحان) است که به یک قیمت معین y مطابقت می‌کند.

$\bar{x}$: اوسط حسابی متحول x است.

S : انحراف معیاری متحول x است.

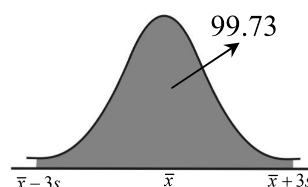
π : یک عدد ثابت است که قیمت عددی آن طور تقریبی ...3.1416 می‌باشد.

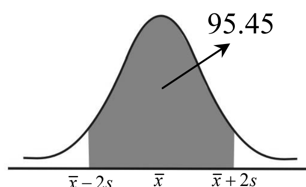
e : نیز یک عدد ثابت است که قیمت تقریبی آن ...2.7183 است.

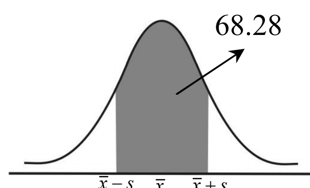
جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 284

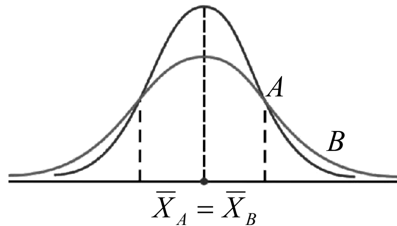
هرگاه %68.28 مشاهدات در انتروال $(x-s\ ,\ x+s)$ قرار داشته باشد؛ آیا %95.45 و %99.73 از مشاهدات در کدام انتروال ها قرار دارند؟ انتروال ها را با منحنی نورمال مشخص کنید.

حل: گفته میتوانیم که %95.45 مشاهدات در انتروال $(\bar{x}-2S,\bar{x}+2S)$ واقع می‌باشد و یا %99.7 مشاهدات در انتروال $(\bar{x}-3S,\bar{x}+3S)$ واقع می‌باشد که گرافهای شان طوری زیر نمایش داده می‌شود.









فصل هشتم احصائیه

عنوان درس: شاخصهای شکل توزیع یک نورمال

صفحهٔ کتاب (285)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان بتوانند تا: • مفهوم شاخصهای توزیع نورمال و موقعیت آنها بدانند. • توزیع نورمال را از غیر نورمال فرق کنند. • در وقت ضرورت فارمول مربوط را با اجزای آن پیدا کنند که با انجام این کار احساس خوشی برایشان دست می‌دهد.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، یکبار دیگر توجه شاگردان را به شکل درس گذشته جلب نماید و بپرسد: • منحنی توزیع نورمال کدام شکل را دارد و چی وقت متناظر گفته می‌شود؟ • برای اینکه مجموعهٔ اطلاعات احصائیوی متناظر و دارای اشاره‌های مثبت و منفی باشد؛ در آن‌صورت از کدام نوع منحنی کار بگیریم. • آیا گفته می‌توانید که اوسط، وسط و مود در توزیع نورمال به کجا موقعیت دارد؟ ممکن شاگردان جواب بگویند، در غیر آن معلم محترم جواب بگوید و به تدریس بپردازد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نماید و برایشان بگوید تا فعالیت صفحهٔ 285 کتاب را در مشورت باهم حل کنند بعد یک یا دو نماینده از گروه‌ها فعالیت گروهی، گروه خویش را به دیگران توضیح کنند. درصورت موجودیت مشکل معلم محترم آن‌ها را کمک و رهنمایی نماید و موضوع را طور زیر تشریح نماید:

آن توزیعی که نظر به اوسط متناظر نباشد خمیده‌گی نامیده می‌شود که به دو ضریب زیر نشان داده می‌شود:

الف: $\alpha_3 = \dfrac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})^3}{S^3}$ این همان شاخصی است که برای تعیین میزان خمیده‌گی به کار برده می‌شود و α_3 عددیست که تنها برای مقایسه کردن از آن کار گرفته می‌شود.

اگر $\alpha_3 = 0$ باشد؛ پس توزیع خمیده‌گی مثبت (*Positive skewness*) دارد؛ یعنی منحنی توزیع به طرف راست واقع است؛ لیکن اگر $\alpha_3 < 0$ باشد؛ پس منحنی توزیع به طرف چپ خمیده‌گی دارد.

ب: $SK_{(P)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$ این فارمول به نام فارمول پیرسن یاد می‌شود. در توزیع متناظر ضریب خمیده‌گی پیرسن مساوی به صفر است.

اگر $SK_{(P)} > 0$ باشد منحنی توزیع به طرف راست و اگر $SK_{(P)} < 0$ باشد منحنی توزیع به طرف چپ واقع می‌باشد.

- معلم محترم یک شاگرد داوطلب را بخواهد تا میزان خمیده گی دیتای $\{6,9,5,4,3,12,19,30\}$ را بـه واسطهٔ α_3 به دست بیاورد و شاگردان دیگر در کتابچه‌های خویش حل کنند، در اخیر شاگردان حل‌های خویش را بـا حل روی تخته مقایسه نمایند در صورت اشتباه معلم محترم آن‌ها را کمک و رهنمایی نماید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

- معلم برای تحکیم هر چه بیشتر درس سؤالهای زیر را به نوبت از شاگردان بپرسد:

1. توزیعی که به دو طرف اوسط متناظر نباشد به چی نام یاد می‌شود؟
2. آن شاخصی که حالت توزیع را بیان می کند به چند قسم است؟
3. هرگاه $\alpha_3 > 0$ باشد توزیع چگونه توزیع است؟
4. هرگاه $\alpha_3 = 0$ باشد توزیع کدام حالت را دارد؟
5. $SK_{(P)}$ شاخص چی چیزی است و به کدام نام یاد می‌شود؟
6. هرگاه $SK_{(P)} < 0$ باشد ، حالت توزیع را بیان کنید.
7. هرگاه $SK_{(P)} = 0$ باشد، اوسط، وسط و مود با یکدیگر چگونه رابطه دارند؟
8. هرگاه $SK_{(P)} > 0$ باشد، آیا اوسط و وسط با یکدیگر مساوی اند؟

در صورتی که جواب ارائه نتوانند، معلم محترم تشریح و توضیح کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای مطمئن شدن از آموزش شاگردان، سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد و جوابهای صحیح به دست بیاورد.

1. یک توزیع چی وقت نورمال می‌باشد؟
2. فارمول پیرسون چی را نشان میدهد؟ بنویسید.
3. هرگاه در فارمول α_3، $x_i = \bar{x}$ شود منحنی توزیع کدام حالت را خواهد گرفت؟

معلومات اضافی برای معلم

- معلم محترم! فارمولی که در کتاب درسی برای خمیده گی تشریح گردیده است برای دیتای خـام صـدق مـی کنـد، در صورتی که جدول فریکونسی داده شده و پیدا کردن ضریب خمیده گی مطلوب باشد، در آنصـورت فـارمول α_3 شـکل $\alpha_3 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{S^3}$ را به خود میگیرد.

- در فارمول فوق f_i فریکونسی صنف‌های مربوط را نشان میدهد و شکل توسعه یافتهٔ آن طور زیر است:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\left[f_1(x_1 - \bar{x})^3 + f_2(x_2 - \bar{x})^3 + \ \dots \ + f_n(x_n - \bar{x})^3\right]}{S^3}$$

مهم اینست که در فارمول $SK_{(P)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$ که به نام ضریب پیرسون یاد می‌شود در آن از med کار گرفته شده است و به کتاب درسی med برای دیتای خام کار شده است؛ لیکن برای جدول فریکونسی کار نشده است و این در معلومات اضافی درس آینده توضیح می‌شود که چطور توان med را برای جدول فریکونسی به دست بیاوریم همین قسم اگر توزیع نارمل باشد؛ پس:

$$SK_{(P)} = 0$$

$$SK_{(P)} = 0 \Rightarrow \frac{3(\bar{x} - med)}{S} = 0 \Rightarrow 3\bar{x} - 3med = 0$$

$$3\bar{x} = 3med \Rightarrow \bar{x} = med$$

رابطهٔ اخیر میرساند که در توزیع نورمال اوسط با وسط مساوی می‌باشد؛ همین قسم هرگاه توزیع به طرف راست خمیده‌گی داشته باشد؛ یعنی $SK_{(P)} > 0$ در آن صورت، اوسط از وسط بزرگ است.

$$SK_{(P)} > 0 \Rightarrow \frac{3(\bar{x} - med)}{S} > 0 \Rightarrow 3\bar{x} - 3med > 0 \Rightarrow \bar{x} > med$$

هرگاه توزیع به طرف چپ خمیده‌گی داشته باشد به این معنی است که $SK_{(P)} < 0$ و از این سبب اوسط از وسط کوچک است:

$$SK_{(P)} < 0 \Rightarrow \frac{3(\bar{x} - med)}{S} < 0 \Rightarrow 3\bar{x} - 3med < 0 \Rightarrow \bar{x} < med$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 286

1- نمرات مضمون ریاضی شاگردان یک صنف به صورت زیر داده شده است.

تعداد شاگردان	4	6	10	4	4	2
نمرات	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100

ضریب خمیده گی پیرسون را محاسبه کنید.

حل: در مرتبهٔ اول ضریب خمیده‌گی را به دست می‌آوریم:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum f_i(x_i - \bar{x})^3}{S^3}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{4\cdot 45 + 6\cdot 55 + 10\cdot 65 + 4\cdot 75 + 4\cdot 85 + 2\cdot 95}{4+6+10+4+4+2} = \frac{1990}{30} = 66\frac{1}{3} = 66.3$$

$$S^2 = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \frac{4(45-66.3)^2 + 6(55-66.3)^2 + 10(65-66.3)^2 + 4(75-66.3)^2 + 4(85-66.3)^2 + 2(95-66.3)^2}{30}$$

$$= \frac{4\cdot 453.7 + 6\cdot 127.7 + 10\cdot 1.7 + 4\cdot 75.7 + 4\cdot 349.7 + 2\cdot 823.7}{30}$$

$$= \frac{1814.8 + 766.2 + 17 + 302.8 + 1398.8 + 1647.4}{30} = \frac{5947}{30} = 198.23 \Rightarrow \boxed{S = 14.07}$$

$$\sum f_i(x_i-\bar{x})^3 = 4(45-66.3)^3+6(55-66.3)^3+10(65-66.3)^3+4(75-66.3)^3+4(85-66.3)^3+2(95-66.3)^3$$
$$= 4\cdot 9663.6+6\cdot 1442.9+10\cdot 2.2+4\cdot 658.5+4\cdot 6539.2+2\cdot 23639.9$$
$$= 38654.4+8657.4+22+2634+26156.8+47279.8=123404.4$$
$$\frac{1}{n}\sum f_i(x_i-\bar{x})^3=\frac{123404.4}{30}=4113.48$$
$$\alpha_3=\frac{\frac{1}{n}\sum f_i(x_i-\bar{x})^3}{S^3}=\frac{4113.48}{(14.07)^3}=\frac{4113.48}{2785.36}=1.47$$

طوری که به ملاحظه میرسد $\alpha_3>0$ است؛ بنا بر آن منحنی به طرف راست خمیده گی(*positive skewness*) دارد.

فصل هشتم احصائیه

عنوان درس: شاخص کشیده‌گی(kurtosis)

صفحهٔ کتاب (286)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان بتوانند تا: • مفهوم شاخصهای خمیده‌گی را بدانند. • منحنی توزیع را تشخیص کنند. • با کسب دانش و مهارت فوق مشکلات روزانه را حل و به خود اعتماد پیدا کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، یکبار دیگر توجه شاگردان را به شکل درس گذشته جلب نماید و بپرسد: در درس گذشته توزیع منحنی نورمال، خمیده‌گی منحنی ییرا به سمت راست و چپ و همچنان شاخص‌های مربوط را مطالعه کردیم. حال یک شاخص دیگر منحنی نورمال را که بلندی و پستی منحنی را آشکار می‌سازد تحت بررسی قرار می‌دهیم، معلم محترم بپرسد: • کی گفته میتواند که بلندی و پستی یک منحنی به کدام کمیت‌ها ارتباط دارند؟ شاید شاگردان جواب گفته نتوانند، در آن صورت معلم محترم جواب بگوید و به تدریس درس جدید بپردازد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند و به ایشان بگوید: هرگاه یک منحنی توزیع برای یک دیتا رسم شود بلندی و پستی آن به چی مربوط است؟(خمیده‌گی منحنی به طرف راست و چپ قابل سؤال نیست) بلندی آن کدام تأثیر بالای دیتا دارد و آن سه شاخص که عبارت اند از: اوسط، وسط و مود می‌باشند به آن قسم منحنی برابر اند یا نه؟
- شاگردان در حالیکه از کتاب استفاده نمیکنند در گروه‌های خود بحث و مشورت می‌نمایند و فعالیت را انجام می‌دهند. در اخیر نمایندۀ یک یا دو گروه، کار گروهی، گروه خویش را به دیگران توضیح می‌دهند. در صورت اشتباه گروه‌ها، معلم محترم طور زیر توضیح و تشریح کند، برای معلوم نمودن بلندی و پستی منحنی از یک شاخص دیگر که به شکل زیر است:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum (x_i - \overline{x})^4}{S^4} = \frac{\frac{1}{n}\left[(x_1 - \overline{x})^4 + (x_2 - \overline{x})^4 + (x_3 - \overline{x})^4 + \ \dots \ + (x_n - \overline{x})^4\right]}{s^4}$$

نیز کار گرفته می‌شود؛ طوری‌که اگر $\alpha_4 = 3$ باشد منحنی توزیع حالت نورمال را دارد و اگر $\alpha_4 < 3$ باشد، منحنی به مقایسهٔ منحنی نورمال پخش و اگر $\alpha_4 > 3$ باشد، منحنی به مقایسهٔ منحنی نورمال بلند می‌باشد.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم برای تحکیم درس مثال صفحهٔ 286 کتاب را به شاگردان بدهد تا بدون استفاده از کتاب درسی، در کتابچه‌های خود حل کنند.

- معلم همزمان یک شاگرد داوطلب را بخواهد تا مثال را روی تخته حل کند و شاگردان حل‌های خویش را با آن مقایسه نمایند، در صورتیکه شاگردان مشکل داشته باشند معلم محترم مثال مذکور را روی تخته حل کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم محترم غرض مطمئن شدن از فراگیری شاگردان سؤالهای زیر را از شاگردان بپرسد و کوشش نماید تا جواب صحیح را از شاگردان به دست بیاورد:

1. اگر $\alpha_4 = 3$ باشد، منحنی توزیع چی شکلی را به خود می‌گیرد؟
2. اگر $\alpha_4 > 3$ باشد، منحنی توزیع نسبت به منحنی نورمال بلند می‌باشد یا پست؟
3. اگر $\alpha_4 < 3$ باشد، منحنی توزیع نسبت به منحنی نورمال بلند می‌باشد یا پست؟

معلومات اضافی برای معلم

- معلم محترم در کتاب درسی در مورد بلندی و پستی منحنی یک مثال کار شده است و آن هم برای دیتای خام.

هرگاه جدول کثرت موجود باشد شاخص بلندی و پستی منحنی یعنی (α_4) از روی فارمول زیر به دست می‌آید:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum f_i(x_i-\overline{x})^4}{S^4} = \frac{\frac{1}{n}\left[f_1(x_1-\overline{x})^4 + f_2(x_2-\overline{x})^4 + f_3(x_3-\overline{x})^4 + \ \ldots \ + f_n(x_n-\overline{x})^4\right]}{s^4}$$

در حالیکه f_i فریکونسی صنفهای مربوط را نشان میدهد.

مهم اینست که در سؤالها جدول فریکونسی داده شده است و ضریب پیرسون خواسته شده است که در فارمول فوق وسط(med) ضرورت است و وسط هم به جدول تطبیق نشده است، بنابر آن هرگاه جدول فریکونسی داده شده باشد و دریافت وسط مطلوب باشد، از فارمول زیر به دست می‌آید:

$$med = L + C\left(\frac{\frac{N}{2} - fc}{fm}\right)$$

در فارمول فوق

L : سرحد پایینی صنف وسط را ارائه می‌کند.

C : وسعت صنف وسط می‌باشد.

N : فریکونسی مجموعی تمام جدول را نشان می‌دهد.

fc : فریکونسی تجمعی صنف وسط می‌باشد.

fm : فریکونسی صنف وسط را نشان می‌دهد.

نوت: صنف وسط عبارت از آن صنف ابتدایی است که فریکونسی تجمعی آن از $\frac{N}{2}$ زیاد باشد.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 286

به درس گذشته سؤالی را در مورد خمیده‌گی حل کردیم آن سؤالی را که مربوط بلندی می‌شود طور زیر حل می‌کنیم:

حل:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum f_i(x_i-\bar{x})^4}{S^4}$$

$$\sum f_i(x_i-\bar{x})^4 = 4(45-66.3)^4 + 6(55-66.3)^4 + 10(65-66.3)^4 + 4(75-66.3)^4 + 4(85-66.3)^4 + 2(95-66.3)^4$$

$$= 823338.46 + 97828.41 + 28.56 + 22915.90 + 489132.38 + 1356930.43 = 2790174.14$$

$$\frac{1}{n}\sum f_i(x_i-\bar{x})^4 = \frac{2790174.14}{30} = 93005.80$$

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum f_i(x_i-\bar{x})^4}{S^4} = \frac{93005.80}{(14.07)^4} = \frac{93005.80}{39190.10}$$

$$\alpha_4 = 2.37$$

طوری‌که $\alpha_4 < 3$ است؛ بنابر آن منحنی کشیده‌گی نظر به منحنی نورمال کم است، یعنی نظر به منحنی نورمال پست‌تر است.

حال ضریب خمیده‌گی پیرسون را به دست می‌آوریم و می‌دانیم صنف وسط صنف سوم است؛ زیرا فریکونسی تجمعی از $\frac{N}{2}$ زیاد است.

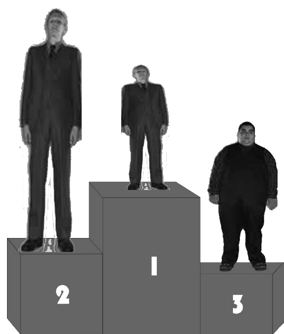
$$\left.\begin{array}{l} N=30 \Rightarrow \frac{N}{2}=15 \\ fc=10 \\ fm=10 \\ L=60 \\ C=10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} SK_{(P)} = \frac{3(\bar{x}-med)}{S} \\ med = L + C\left(\frac{\frac{N}{2}-fc}{fm}\right) \end{array}$$

$$med = 60 + 10\left(\frac{15-10}{10}\right) = 60 + 5 = 65$$

$$SK_{(P)} = \frac{3(\bar{x}-med)}{S} = \frac{3(66.3-65)}{14.07} = \frac{3(1.3)}{14.07} = \frac{3.9}{14.07}$$

$$\boxed{SK_{(P)} = 0.277}$$

طوری‌که $SK_{(P)} = 0.277 > 0$ است؛ پس منحنی توزیع، خمیده‌گی مثبت دارد یا به طرف راست واقع است.



فصل هشتم احصائیه

عنوان درس: جامعه‌های چند متحوله

صفحهٔ کتاب (287)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان بتوانند تا: • به مفهوم جامعهٔ چند متحوله بفهمند. • جامعه‌های یک متحوله، دومتحوله و... را از هم فرق نمایند. • از دریافت ارتباط میان متحول‌های یک جامعهٔ دو متحوله در زنده‌گی کار بگیرند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت، چارت ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، چارت را پیشروی صنف بیاویزد توجه شاگردان را به چارت جلب نماید و به ایشان بگوید: • در چارت چی را می‌بینید؟ • هرگاه وزن یک شخص معلوم باشد آیا می‌توانید اندازهٔ قد آن را تعیین کنید؟ • هرگاه اندازهٔ قد یک شخص معلوم باشد، آیا می‌توانید وزن آن را پیدا کنید؟ • آن جامعه‌ها چند متحول دارند و کدامها اند؟ - معلم محترم کوشش کند تا جوابها را از شاگردان به دست بیاورد، در غیر آن برایشان کمک و رهنمایی نماید و به تدریس درس جدید بپردازد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 287 کتاب را در مشورت باهم حل کنند.
- معلم از جریان فعالیت شاگردان نظارت کند در صورت داشتن مشکل آنها را کمک نماید.
- معلم یک یا دو شاگرد داوطلب رابخواهد تا فعالیت گروهی، خویش را با ارائه یک مثال روی تخته به دیگران توضیح کنند. در صورتیکه نماینده‌ها اشتباه می‌نمایند، اشتباه شان توسط یک داوطلب گروه دیگر رفع شود، بعد معلم تدریس را اینطور شروع کند.

یک جامعه‌یی چند متحوله عبارت از جامعه‌یی است که دارای چند متحول باشد و متحول به آن چیز گفته می‌شود که قابل اندازه گیری باشد.

ما در این درس یک جامعهٔ دو متحوله را مورد بررسی قرار می‌دهیم؛ مانند ارتباط میان وزن و قد که یک جامعهٔ دو متحوله است.

میخواهیم ارتباط بین این دو متحول(وزن و قد) را پیدا کنیم. آن به این معنی است که اگر یک آنها معلوم باشد؛ دیگر آن را چطور پیدا نموده می‌توانیم.

در قدم نخست باید برای ترتیب معادله‌ها معلومات جمع‌آوری شود.

در قدم دوم معلومات جمع‌آوری شده به مانند متحولین با ارزش، در یک مستوی مختصات قایم جمع آوری و توسط نقاط نشانی می‌شود.

در نتیجه شکلی که از اتصال نقاط به دست می‌آید به ما یک گراف را وانمود می‌سازد.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم برای تحکیم بخشیدن درس مثال صفحهٔ 288 کتاب را به شاگردان بدهد تا بدون استفاده از کتاب در کتابچه‌های خویش حل کنند.
- معلم از کار و فعالیت شان نظارت به عمل آورد. دراخیر یک شاگرد داوطلب مثال مذکور را روی تخته حل کند، شاگردان حل‌های خویش را با حل روی تخته مقایسه نمایند.
- معلم ببیند که هرگاه شاگردان در مورد حل مثال مشکلی داشتند، به حل مشکل شان روی تخته بپردازد.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم محترم برای اطمینان از آموزش شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد، کوشش کند تا جوابهای درست را از آنها به دست بیاورد:

1. کی متحول را از نظر احصائیه تعریف می‌کند؟
2. اگر بخواهیم اندازهٔ قد و وزن شاگردان یک صنف را همزمان بررسی نماییم؛ پس این چی قسم یک جامعه است؟
3. در مثال حل شدهٔ گذشته مختصهٔ اول و دوم چی را نشان میدهند؟

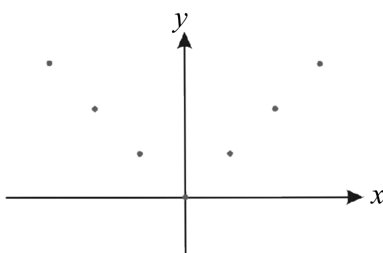
معلومات اضافی برای معلم

چطور میتوان ارتباط بین دو متحول را دریافت کرد؟ وبرای اینکه یک متحول را از جنس متحول دیگر ارائه کنیم؛ پس لازم است تا در مورد ارتباط دو متحول معلومات کافی داشته باشیم یعنی ابتدا در مورد اندازهٔ تمام اعضای جامعه معلومات حاصل و با در نظرداشت نتایج آن می‌توان یک متحول را از جنس متحول دیگر ارائه کرد. در جریان ارائه یک فرضیهٔ مهم موجود است که باید آن را تحت مطالعه قرار داد و آن عبارت از رابطهٔ خطی بین دو متحول می‌باشد که این رابطه به شکل یک خط مستقیم نمایش داده می‌شود. می‌دانیم که معادلهٔ خط مستقیم شکل $y = a + bx$ را دارد. در معادلهٔ فوق a یک مقدار ثابت است. هرگاه در معادلهٔ مذکور $x = 0$ شود $y = a$ می‌شود. آن معادله‌یی که ارتباط میان دو متحول را افاده می‌کند به نام معادلهٔ تخمین یا سنجش یاد می‌شود.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 288

1- برای بلند بردن محصولات زراعتی، فکتورهایی از قبیل اندازهٔ آب، اندازهٔ کود کیمیاوی، نوع کود، اندازهٔ آفتاب و نوع خاک مؤثر اند، آیا گفته میتوانید که حد اقل با چند نوع متحول سروکار داریم؟

حل: در این جامعه کم از کم پنج قسم متحول موجود است؛ زیرا که در علم احصائیه متحول طور زیر تعریف شده است: هر چیزیکه قابل اندازه باشد به آن متحول گفته می‌شود؛ بنا برآن در جامعه‌های فوق پنج متحول موجود است که به آنها سروکار داریم و عبارت اند از: (آب، کود، شکل کود، آفتاب و خاک می‌باشند.)



فصل هشتم احصائیه

عنوان درس: گراف پراکنده‌گی

صفحهٔ کتاب (289)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان بتوانند تا: • مفهوم گراف پراکنده‌گی را بدانند. • گراف پراکنده‌گی یک جامعهٔ دو متحوله را در سیستم مختصات قایم رسم کنند. • با فراگیری دانش و مهارت فوق اعتماد به نفس پیدا کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	شکل چارت ورودی(مواد مورد ضرورت)
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی به نکات مهم درس گذشته تماس بگیرد، توجه شاگردان را به شکل چارت ورودی جلب نماید و به آنها بگوید: • آیا در گرافی که ملاحظه می کنید تمام نقاط روی یک خط مستقیم واقع اند؟ • چرا این قسم گراف را گراف پراکنده‌گی می‌گویند؟ • آیا می‌توانید تمام نقاط را به شکل جوره‌های مرتب نشان دهید؟ • آیا می‌توانید معادلهٔ ریاضیکی گراف مذکور را به دست بیاورید؟ کوشش شود تا جواب سؤالها از شاگرد گرفته شود، در غیر آن ایشان را کمک و رهنمایی نماید و به تدریس بپردازد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 289 کتاب را در مشورت با هم انجام دهند.

- معلم محترم از جریان فعالیت نظارت به عمل آورد و در صورتیکه شاگردان مشکل داشته باشند به حل مشکل شان بپردازد.

در ختم فعالیت، نمایندهٔ یک یا دو گروه فعالیت گروهی، گروه خویش را به دیگران توضیح نماید در صورت اشتباه، یک داوطلب از گروه دیگر به رفع آن بپردازد.

بعد معلم محترم در مورد پراکنده‌گی اینطور بگوید:

گراف پراکنده‌گی را از اینرو گراف پراکنده‌گی میگویند که تمام نقاط آن به امتداد یک خط مستقیم نه؛ بلکه تیت و پاشان می‌باشند.

- معلم محترم یک شاگرد داوطلب را بخواهد تا مثال صفحهٔ 290 کتاب را روی تخته حل کند و شاگردان دیگر همزمان عین مثال را در کتابچه‌های خویش بدون استفاده از کتاب درسی حل کنند. در اخیر فعالیت انجام شدهٔ خویش را با حل روی تخته مقایسه نمایند، در صورت داشتن مشکل، معلم آنها را کمک و رهنمایی نماید.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم محترم برای تحکیم بیشتر درس، یک شاگرد داوطلب را بخواهد تا جوره‌های مرتب جزء(الف) و (هـ) گراف پراکنده‌گی صفحهٔ 290 کتاب را به دست بیاورد و شاگردان دیگر در کتابچه‌های خویش عین کار را انجام دهند. در اخیر، فعالیت انجام شدهٔ خویش را با حل روی تخته مقایسه نمایند در صورت درست بودن حل روی تخته شاگردانی که اشتباه کرده اند اصلاح نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

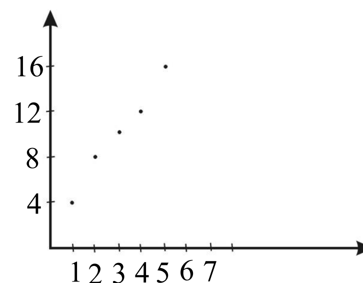
- معلم برای مطمئن شدن از فراگیری شاگردان، سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. گراف پراکنده‌گی را چرا گراف پراکنده‌گی می‌گویند؟
2. جوره‌های مرتب گراف پراکنده‌گی مربوط جزء(ج) صفحهٔ 290 کدام‌ها اند؟
3. از اتصال تمام نقاط گراف پراکنده‌گی جزء(ب) صفحهٔ 290 کدام شکل حاصل می‌شود؟

معلومات اضافی برای معلم

- معلم محترم! در مورد گراف پراکنده‌گی به معلومات اضافی ضرورت نیست؛ زیرا این موضوعی است که با ضریب همبسته‌گی کمک می‌کند؛ بنا بر آن با ارائه یک مثال در مورد اکتفا می‌کنیم:

هرگاه نتایج دو امتحان شاگردان را در نظر بگیریم، درحالیکه نتایج امتحان اول را به x و نتایج امتحان دوم را به y نشان دهیم، در آن صورت ارتباط بین x و y را در سیستم مختصات قایم میتوانیم نشان دهیم؛ طوری‌که هر جورهٔ مرتب یک نقطه را در سیستم مذکور مشخص می‌سازد. جدول نمرات با گراف مربوط طور زیر ارائه می‌شود:



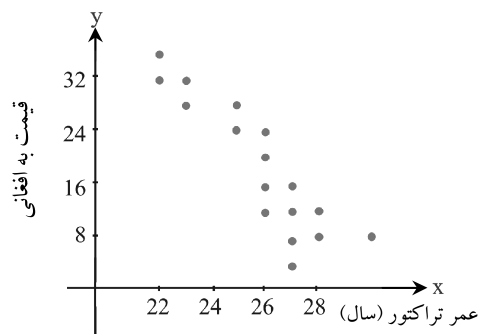
x	1	3	4	6	7
y	4	8	10	14	16

نتیجه: نکتهٔ اصلی بحث بالا این است که در گراف پراکنده‌گی هر نقطه یک جورهٔ مرتب را و بر عکس هر جورهٔ

مرتب یک نقطه را در گراف پراکنده‌گی نشان می‌دهد.

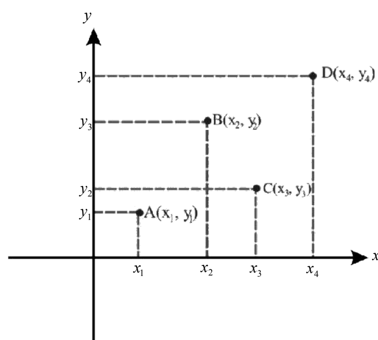
جواب به سؤال های تمرین

گراف مقابل قیمت و عمر یک تعداد تراکتورها را نشان می دهد؛ آیا ارتباط بین این دو متحول وجود دارد؟ توضیح دهید.



حل: طوری‌که از سؤال معلوم می‌شود در جامعهٔ فوق الذکر دو متحول موجود است؛ یکی آن عمر تراکتورها و دیگر آن قیمت تراکتورها.

قسمی‌که از گراف معلوم می‌شود تمام نقاط به صورت تقریبی به یک خط واقع اند(بعضی‌ها بالاتر از خط و بعضی‌ها به طرف پایین خط واقع اند.)؛ بنا برآن در بین این دو متحول زمانی ارتباط محکم موجود می‌شود که نقاط نزدیک به خط یا روی خط واقع باشند.



فصل هشتم احصائیه

عنوان درس: همبسته‌گی و ضریب همبسته‌گی

صفحهٔ کتاب (291)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان بتوانند تا: • مفهوم همبسته‌گی وضریب همبسته‌گی را بفهمند. • فرق همبسته‌گی زیاد و کم را بین متحولین یک جامعه نمایند. • از دانش و مهارت فوق در زنده‌گی روزانه استفاده نمایند وبه خود باورمند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	شکل چارت ورودی(مواد مورد ضرورت)
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، از درس گذشته طور مختصر یاد آوری نماید؛ سپس توجه شاگردان را به چارت شکل ورودی جلب و از ایشان بپرسد: • آیا امکان پذیر است که تمام نقاط چارت به وسیلهٔ یک خط مستقیم وصل شوند؟ چرا؟ • آیا خطی موجود می‌شود که از آن نقاط بگذرد و تمام نقاط به آن نزدیکترین فاصله را داشته باشد؟ • بگویید که معادلهٔ خط مناسب که به تمام نقاط نزدیک باشد، کدام شکل را داشته می باشد؟ - معلم کوشش کند تا جواب سؤالها از شاگردان گرفته شود، در غیر آن ایشان را کمک و رهنمایی نماید و به تدریس بپردازد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 291 کتاب را در مشورت باهم انجام دهند.

- معلم از جریان فعالیت گروه‌ها، نظارت کند و در صورت داشتن مشکلات شاگردان را کمک و رهنمایی کند. در ختم یک یا دو نمایندهٔ از گروه‌ها، فعالیت گروهی خویش را به دیگران توضیح دهند. هرگاه گروهی مرتکب اشتباه شده بود، توسط نمایندهٔ گروه دیگری اصلاح شود. در اخیر معلم موضوع را طور زیر توضیح نماید:

هرگاه یک جامعهٔ دو متحوله داشته باشیم و بخواهیم ارتباط بین متحولین جامعه را پیدا کنیم؛ پس باید گراف پراکنده‌گی جامعه را رسم نماییم. به هر اندازه‌یی که نقاط پراکنده‌گی گراف به امتداد یک خط مستقیم باشد به همان اندازه همبسته‌گی بین متحولین زیاد می‌باشد.

به هر اندازه‌یی که نقاط از خط مستقیم دور واقع باشند ارتباط بین همبسته‌گی متحولین کم می‌باشد، بنابر آن شاخصی که همبسته‌گی بین دو متحول رانشان میدهد عبارت از ضریب همبسته‌گی می‌باشند و به r نشان داده می‌شود که فارمول آن $r=\dfrac{\frac{1}{n}\sum xy-\bar{x}\,\bar{y}}{S_x\cdot S_y}$ است.

- معلم محترم نسبت اهمیت موضوع مثال صفحهٔ 292 کتاب را روی تخته حل کند و اجزای فارمول را مانند $\frac{1}{n}\sum xy, \bar{x}, \bar{y}, S_x$ و S_y را توسط شاگردان به دست بیاورد. شاگردان دیگر در کتابچه‌های خویش یادداشت نمایند. هرگاه در جریان به دست آوردن اجزای فارمول مشکلی باشد معلم کمک و رهنمایی کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس مثال صفحهٔ 293 کتاب را توسط یک شاگرد روی تخته حل کند و شاگردان دیگری عین مثال را بدون استفاده از کتاب در کتابچه‌های خویش حل کنند و با حل روی تخته مقایسه نمایند.

دقت شود که شاگردان اجزای فارمول ضریب همبسته‌گی را به شکل درست به دست آورده می‌توانند یا خیر؟ در صورتیکه شاگردان مشکل داشته باشند معلم کمک و رهنمایی کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم غرض مطمئن شدن از فراگیری شاگردان سؤالهای زیر را از آنها بپرسد و کوشش کند تا جوابهای درست از شاگردان به دست بیاورد:

1. همبسته‌گی و ضریب همبسته‌گی چی مفهوم دارند و کدام وقت به کار می‌شود؟
2. هرگاه تمام نقاط گراف پراکنده‌گی روی یک خط مستقیم واقع شوند قیمت r چند خواهد بود؟
3. هرگاه r مثبت باشد، در آنصورت با زیاد شدن قیمت‌های x، قیمت y زیاد می‌شود یا کم؟

معلومات اضافی برای معلم

- معلم محترم بین ضریب ارتباط همبسته‌گی و بین ارتباط متحولین یک شاخص می‌باشد که اقسام مختلف دارد که این اکثریت شان بعضی صفات مشترک دارند.

هرگاه دو متحول در بین خود ارتباط مثبت داشته باشند؛ پس ضریب همبسته‌گی شان$(+1)$ و اگر ارتباط منفی داشته باشند؛ پس ضریب همبسته‌گی شان(-1) می‌باشد.

هرگاه دو متحول در بین خود هیچ ارتباط نداشته باشد؛ پس ضریب همبسته‌گی صفر است اگر ضریب همبسته‌گی r باشد؛ پس $-1\le r\le +1$ به صورت مختصر اگر $r=+1$ باشد؛ پس ارتباط بین دو متحول طور مکمل مثبت و اگر $r=-1$ باشد؛ پس ارتباط به طور مکمل منفی می‌باشد، لیکن اگر $r=0$ نباشد؛ پس ارتباط میان متحول‌ها موجود نمی‌باشد.

در حالات دیگر که نقاط به صورت کامل روی خط مستقیم واقع نباشند می‌تواند ارتباط مثبت، ارتباط منفی و یا می‌تواند ارتباط به شکل یک خط منحنی باشد و یا هیچ ارتباط موجود نباشد.

هر قدر نقاط به خط مستقیم نزدیک شود درجۀ همبسته‌گی بلند می‌شود. ضریب همبسته‌گی به واسطۀ فارمولیکه به نام ارقام انحرافی یاد می‌شود هم محاسبه می‌شود $r=\frac{\sum xy}{\sum x^2\cdot\sum y^2}$ که $x=X-\overline{X}$ و $y=Y-\overline{Y}$ می‌شود.

جواب به سؤال های تمرین صفحۀ 294

1- data زیر را در نظر بگیرید.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

ضریب همبسته گی این اطلاعات را محاسبه کنید.

حل:

$$\overline{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=\frac{15}{5}=3$$

$$\overline{y}=\frac{4+3+2+1+0}{5}=\frac{10}{5}=2$$

$$S_x^2=\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n}=\frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5}=\frac{4+1+0+1+4}{5}=\frac{10}{5}=2$$

$$S_y^2=\frac{(4-2)^2+(3-2)^2+(2-2)^2+(1-2)^2+(0-2)^2}{5}=\frac{4+1+0+1+4}{5}=\frac{10}{5}=2$$

$$\Rightarrow S_x=\sqrt{2}\quad,\qquad S_y=\sqrt{2}$$

حاصل ضرب x ها و y ها $=\sum xy=1\cdot4+2\cdot3+3\cdot2+4\cdot1+5\cdot0=4+6+6+4+0=20$

$$r=\frac{\frac{\sum x\cdot y}{n}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{S_x\cdot S_y}$$

$$r=\frac{\frac{20}{5}-3\cdot2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{4-6}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

ما گفته بودیم که هرگاه ضریب همبسته‌گی ±1 شود؛ پس تمام نقـاط روی خـط واقع مـی‌باشـد و خطـای y موجـود نمیباشد.

2- ضریب همبسته گی قد و وزن هم صنفی های خود را حساب کنید.

حل: هرگاه قد شاگردان را به x و وزن شان را به y نشان دهیم؛ پس برای شاگردان یک صنف ده نفری جـدول زیـر را در نظر میگیریم:

$x(cm)$	163	165	167	169	171	145	142	140	130	147
$y(kg)$	62	65	70	75	80	70	75	60	55	50

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_i}{n}=\frac{163+165+167+169+171+145+142+140+130+147}{10}=\frac{1539}{10}=153.9$$

$$\bar{y}=\frac{62+65+70+75+80+70+75+60+55+50}{10}=\frac{662}{10}=66.2$$

$$S_x^2=\frac{(163-153.9)^2+(165-153.9)^2+(167-153.9)^2+(169-153.9)^2+(171-153.9)^2}{}$$

$$+\frac{(145-153.9)^2+(142-153.9)^2+(140-153.9)^2+(130-153.9)^2+(147-153.9)^2}{10}$$

$$S_x^2=\frac{82.81+123.21+171.61+228.01+292.41+79.21+141.61+193.21+571.21+47.61}{10}$$

$$S_x^2=\frac{1930.9}{10}\ \Rightarrow\ \boxed{S_x=13.89}$$

$$S_y^2=\frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n}$$

$$=\frac{(62-66.2)^2+(65-66.2)^2+(70-66.2)^2+(75-66.2)^2+(80-66.2)^2+(70-66.2)^2}{}$$

$$+\frac{(75-66.2)^2+(60-66.2)^2+(55-66.2)^2+(50-66.2)^2}{10}$$

$$S_y^2=\frac{17.64+1.44+14.44+77.44+190.44+14.44+77.44+38.44+125.44+262.44}{10}$$

$$S_y^2=\frac{819.6}{10}=81.96\ \Rightarrow\ S_y=9.05$$

$$\sum x\cdot y=163\cdot62+165\cdot65+167\cdot70+169\cdot75+171\cdot80+145\cdot70+142\cdot75+140\cdot60+130\cdot55+147\cdot50$$

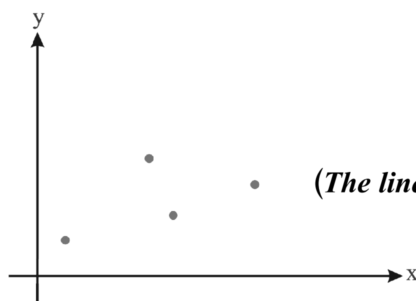
$$\sum x\cdot y=10106+10725+11690+12675+13680+10150+10650+8400+7150+7350$$

$$\sum x\cdot y=102576$$

$$\frac{\sum x\cdot y}{n}=\frac{102576}{10}=10257.6$$

$$r=\frac{\frac{\sum x\cdot y}{n}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x\cdot S_y}=\frac{10257.6-10188.18}{13.89\cdot9.05}=\frac{69.42}{125.704}\ \Rightarrow\ r=0.552$$

عدد 0.552 می‌رساند که نصف نقاط بالا از خط و نصف دیگر آن پایین‌تر از خط موقعیت دارند؛ یعنی گفته می‌توانیم که بین x(قد) و y(وزن) 55% ارتباط موجود است.



فصل هشتم احصائیه

عنوان درس: معادلهٔ میلان خطی(*The linear regression equation*)

صفحهٔ کتاب (295)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی	شاگردان بتوانند تا:
- دانشی	• مفهوم معادلهٔ خطی را بفهمند.
- مهارتی	• معادلهٔ میلان خطی یک دیتا(به هر ارتباط که باشد) را پیدا کنند.
- ذهنیتی	• با به کارگیری دانش و مهارت فوق در امور مربوط، خوشحال شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	شکل چارت ورودی(مواد مورد ضرورت)
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، از شاگردان در مورد درس گذشته بپرسد، توجه شاگردان را به شکل ورودی جلب نماید و از آنها سؤال کند: • در چارت مقابل چی را می بینید؟ • آیا تمام نقاط به امتداد یک خط مستقیم اند؟ • آیا میتوانیداز اتصال نقاط نشانی شده معادلهٔ منحنی را به دست بیاورید؟ • آیا در شکل مقابل یک خط طوری رسم شده می‌توانند که تمام نقاط به آن نزدیک باشند؟ - معلم کوشش کند تا جواب سؤالها از شاگردان گرفته شود، در غیر آن ایشان را کمک و رهنمایی نماید و به تدریس درس بپردازد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان رابه گروه‌های مناسب تقسیم نماید تا فعالیت صفحهٔ 295 کتاب را در گروه‌های خویش با مشورت همدیگر انجام دهند. در ختم فعالیت، نمایندهٔ یک یا دو گروه، فعالیت گروهی خویش را به دیگران توضیح دهند. در صورت مشکل معلم کمک و رهنمایی نماید و طور زیر به تشریح موضوع بپردازد:

قسمیکه از نام معادلهٔ میلان خطی معلوم می‌شود معادلهٔ آن خط مناسب را نشان میدهد که تمام نقاط پراکنده‌گی گراف نزدیک به آن واقع اند؛ پس از اینرو یک خطی که به تمام نقاط نزدیک باشد، به دست می‌آوریم که این خط به نام میلان خطی یا دمی‌شود.

برای دریافت معادلهٔ میلان خطی باید a و b معلوم باشند و میدانیم که معادلهٔ هر گراف خطی به شکل $y = ax + b$ می‌باشد؛ پس $a = r\frac{S_y}{S_x}$ و $b = \bar{y} - a\bar{x}$ که در اینجا r ضریب همبسته‌گی، $\bar{y}$ اوسط متحول $\bar{x}, y$ اوسط متحول S_y , x انحراف معیاری متحول S_x , y انحراف معیاری متحول x است.

برای به دست آوردن a و b قیمت‌های a و b را در معادلهٔ $y = ax + b$ می‌گذاریم، در نتیجه معادلهٔ حاصل شده عبارت از معادلهٔ میلان خطی می‌باشد.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم درس مثال صفحهٔ 298 کتاب را توسط یک شاگرد داوطلب روی تخته حل کند، همزمان مثال مذکور را شاگردان دیگر در کتابچه‌های خویش بدون استفاده از کتاب حل نمایند و با حل روی تخته مقایسه کنند.
- معلم از جریان فعالیت شاگردان نظارت کند در صورتی که شاگردان مشکل داشته باشند به مشکل شان پرداخته و یکبار دیگر درس را توضیح نماید.

دقت شود تا شاگردان به شکل درست $a,\ S_x, S_y, r, \bar{y}, \bar{x}$ و b را به دست بیاورند. هرگاه شاگردان مشکل داشته باشند، معلم کمک و رهنمایی نماید.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم غرض اطمینان پیدا کردن از آموخته‌های شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد و کوشش کند تا جواب درست را از شاگردان دریافت کند:

1. معادلهٔ میلان خطی چی را نشان میدهد؟
2. آیا در گراف پراکنده‌گی تمام نقاط روی یک خط واقع شده می‌توانند؟
3. آیا در گراف پراکنده‌گی خطی را رسم کرده می‌توانید که از تمام نقاط بگذرد؟

معلومات اضافی برای معلم

- معلم محترم! مفهوم دیگری که در موضوع همبسته‌گی قابل یادآوری می‌باشد، مفهوم رجعت است که به مفهوم میلان یاد می‌شود، در احصائیه همبسته‌گی و میلان(*Regression*) با یکدیگر آنقدر ارتباط نزدیک دارند که اکثراً موضوع به جای یکدیگر به کار برده می‌شود. اصطلاح همبسته‌گی به درجهٔ ارتباط دو متحول اطلاق می‌شود. زمانیکه دو متحول با یکدیگر ارتباط داشته باشند از روی یک متحول در مورد متحول دیگری ابراز نظر شده میتواند، لیکن کلمهٔ میلان به آن صفات و مشخصات متحولین یک رویداد اطلاق می‌شود که ارتباط بین دو متحول مکمل نباشد.

در جریان پیشبینی که یک فرضیهٔ مهم موجود است و باید آن را زیر نظر بگیریم. در بین دو متحول یک رابطهٔ خطی است که این رابطه به شکل خط مستقیم نشان داده می‌شود. میدانیم که معادلهٔ خط مستقیم شکل $y = ax + b$ را دارد.

در معادلۀ فوق a یک مقدار ثابت می‌باشد، در صورتیکه $x=0$ شود $y=b$ می‌شود که در گراف پراکنده‌گی(*scatter diagram*) تمام نقاط در یک خط مستقیم قرار می‌داشته باشد که در بین متحولین ارتباط خطی و همبسته‌گی(*Linear Regression*) موجود است می‌تواند ساده یا چند خطی قبول شود.

در احصائیه این منحنی را با خصوصیت (*Least Squares Curves*) و یا (*Least Square Regression*) می‌گویند.

جواب به سؤال های تمرین صفحۀ 298

اگر $y=2x+3$ معادله خط رگرسیون y نسبت به x و اوسط x برابر 2 باشد اوسط y چقدر است؟

حل: با در نظرداشت معادلۀ میلان خطی داریم که:

$$y=2x+3 \Rightarrow a=2 \ , \quad b=3$$

$$\left.\begin{matrix}\bar{x}=2\\ \bar{y}=?\end{matrix}\right\} \ b=\bar{y}-a\bar{x}$$

$$b-\bar{y}=-a\bar{x}$$

$$-\bar{y}=-a\bar{x}-b \,/\cdot(-1)$$

$$\bar{y}=a\bar{x}+b=2\cdot 2+3=4+3=7 \ \Rightarrow \ \boxed{\bar{y}=7}$$

حل تمرینات عمومی فصل هشتم(6 ساعت درسی)

1- اگـر در یـک جامعـه اوسـط آن $\bar{x} = 50$ و واریاسـن آن $S^2 = 64$ باشـد ضـریب تغییـرات y کـه بـر طبـق رابطـه $y = 2x + 10$ از متحول x پیروی می کند چقدر است؟

حل:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} = 50 \\ S^2 = 64 \quad \Rightarrow \quad S = 8 \end{array}\right\} \quad C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{8}{50}$$

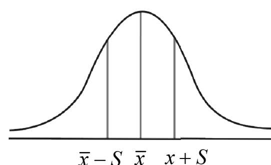
$$C \cdot V = 0.16$$

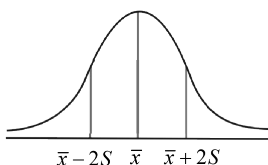
$$C \cdot V = 16\%$$

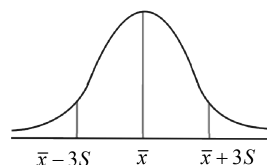
2- اگر 20% نمره به نمرهٔ هر متعلم اضافه شود چه تأثیری روی ضریب تغییرات نمره حاصل می شود؟

حل: هرگاه 20%به نمرهٔ هر شاگرد زیاد شود، بنابر آن اوسط آن زیاد می‌شود، طوریکه $\bar{x}$ در مخرج فارمول ضریب تغییـرات $C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$ قرار دارد از این سبب ضریب تغییـرات کم می‌شود.

3- فیصدی جامعه‌هایی را که میان منحنی های زیر قرار دارند بنویسید.







حـــل: در جامعـهٔ I تمـام مـوارد تحقیـق بـه $(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$ ، 68% اسـت، بـه جامعـهٔ II تمـام مـوارد تحقیـق بـه انتروال $(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$ ، 96% است و بالآخره در جامعهٔ III تمام مـوارد تحقیـق در انتـروال $(\bar{x} - 3S, \bar{x} + 3S)$، 99% می‌باشد.

4- با توجه به روابط زیر بگویید که کدام یک از ایـن روابـط جامعـه یـک متحولـه، دو متحولـه و سـه متحولـه را نشـان می دهد.

الف: اندازهٔ قد هم صنفی های شما ب: ارتباط بین مصرف مجموعی و قیمت متاع

ج: ارتباط بین حجم استوانه و شعاع قاعده و ارتفاع آن

حل: هر چیز(عنصر) که قابل اندازه گیری باشد متحول نامیده می‌شود.

الف) ارتباط یک متحوله است و متحول آن اندازهٔ قد شاگردان صنف می‌باشد.

ب) ارتباط دو متحوله است و متحولین مصرف عمومی و جنس می‌باشد.

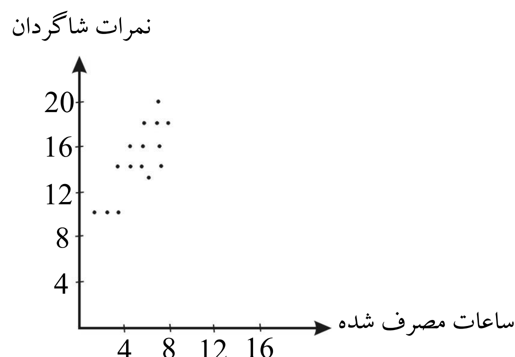
ج) ارتباط سه متحوله است و متحولین آن، حجم ارتفاع و مساحت قاعده می‌باشد.

5- تعداد ساعات صرف شده و نمراتی که شاگردان یک صنف از قرار 20% اخذ نموده اند به شکل جوره های مرتب در زیر آورده شده است:

(2,10) , (3,10) , (3,14) , (4,10) , (4,14)
(5,14) , (5,16) , (6,12) , (6,16) , (6,18)
(7,14) , (7,18) , (7,20) , (8,16) , (8,18)

گراف پراکنده‌گی را برای نشان دادن رابطه بین تعداد ساعات مطالعه و نمرهٔ امتحان رسم کنید. چه نتیجه یی می گیرید؟

حل: در قدم نخست سیستم کمیات وضعیه را رسم می‌کنیم روی محور x ساعات مصرف شده را و روی محور y نمرات شاگردان را نشان می‌دهیم:



از گراف بالا به این نتیجه می رسیم که با زیاد شدن مصرف ساعات، نمرات شاگردان هم ازدیاد می‌یابد.

6- data زیر را در نظر بگیرید.

x	1	1	2	3
y	1	5	4	2

ضریب همبسته گی دراین داده ها را محاسبه کنید.

حل:

$$\bar{x} = \frac{1+1+2+3}{4} = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$\bar{y} = \frac{1+5+4+2}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$S_x^2 = \frac{(1-1.75)^2 + (1-1.75)^2 + (2-1.75)^2 + (3-1.75)^2}{4} = \frac{0.56+0.56+0.06+1.56}{4} = \frac{2.74}{4}$$

$$S_x = 0.82$$

$$S_y^2 = \frac{(1-3)^2 + (5-3)^2 + (4-3)^2 + (2-3)^2}{4} = \frac{4+4+1+1}{4} = \frac{10}{4} = 2.5 \Rightarrow S_y = 1.58$$

$$\sum x \cdot y = 1\cdot 1 + 1\cdot 5 + 2\cdot 4 + 3\cdot 2 = 1+5+8+6 = 20$$

$$\frac{1}{n}\sum x \cdot y = \frac{20}{4} = 5$$

$$r = \frac{\frac{\sum x \cdot y}{n} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{5 - 1.75\cdot 3}{0.82\cdot 1.58} = \frac{5-5.25}{1.29} = \frac{-0.25}{1.29} \Rightarrow \boxed{r = -0.19}$$

7- اگر ضریب همبسته گی به صفرنزدیکترباشد،آیا خطای y بیش تراست یا کم تر؟

حل: هر قدر که ضریب همبسته گی به صفر نزدیک باشد به این معنا است که تمام نقاط دیاگرام متفرق از خط فاصلهٔ زیاد دارد، بنا بر آن خطا زیاد است.

8- اگر ضریب همبسته گی به 1+ و 1- نزدیک ترباشددرباره خطای y چه می گویید؟

حل: هرگاه $r = \pm 1$ باشد؛ پس تمام نقاط روی خط $y = ax + b$ واقع است و خطا هیچ موجود نمی‌باشد.

9- نظر به یک سروی که دردوصنف A و B یک مکتب صورت گرفته است، اعدادزیر درمورد وزن 12 شاگرد به حساب کیلو گرام جمع آوری گردیده است.

A:	65	63	67	64	62	70	66	68	67	78	69	71
B:	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

با در نظرداشت اعداد بالا:

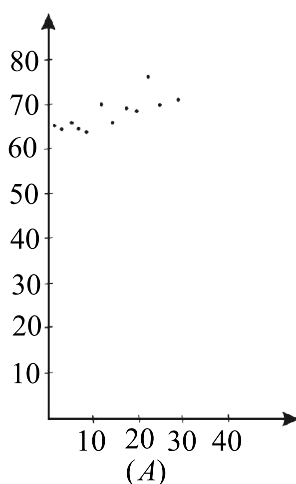
الف: گراف پراکنده گی داده ها را رسم نمایید.

ب: معادلهٔ خط مستقیم مربوط را به دست آورده ارزش های a و b را تعیین کنید.

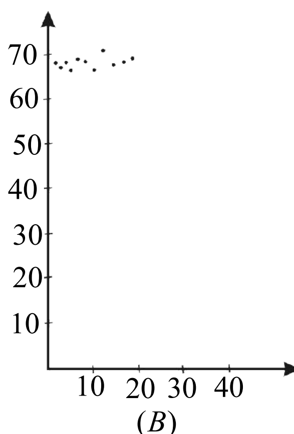
ج: خط مستقیم مربوط را نظر به معادلهٔ رگرسیون رسم کنید.

حل:

الف) نخست گراف پراکندگی هر گروه را جدا، جدا رسم می کنیم



(A)



(B)

ب)

$$A_{\bar{x}}=\frac{65+63+67+64+62+70+66+68+67+78+69+71}{12}=\frac{810}{12}=67.50$$

$$B_{\bar{y}}=\frac{68+66+68+65+69+66+68+65+71+67+68+70}{12}=\frac{811}{12}=67.58$$

$$S_x^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{(65-67.5)^2+(63-67.5)^2+(67-67.5)^2+(64-67.5)^2+(62-67.5)^2+(70-67.5)^2}{}$$

$$\frac{+(66-67.5)^2+(68-67.5)^2+(67-67.5)^2+(78-67.5)^2+(69-67.5)^2+(71-67.5)^2}{12}$$

$$=\frac{6.25+20.25+0.25+12.25+30.25+6.25+2.25+0.25+0.25+110.25+2.25+12.25}{12}$$

$$=\frac{203}{12}=16.9\ \Rightarrow\ \boxed{S_x=4.1}$$

$$S_y^2=\frac{\sum(y_i-\bar{y}^2)}{n}=\frac{(68-67.58)^2+(66-67.58)^2+(68-67.58)^2+(65-67.58)^2+(69-67.58)^2+(66-67.58)^2}{}$$

$$\frac{+(68-67.58)^2+(65-67.58)^2+(71-67.58)^2+(67-67.58)^2+(68-67.58)^2+(70-67.58)^2}{12}$$

$$=\frac{0.176+2.496+0.176+6.656+2.016+2.496+0.176+6.656+11.696+0.336+0.176+5.856}{12}$$

$$=\frac{38.91}{12}=3.24\ \Rightarrow\ \boxed{S_y=1.8}$$

$$\sum A_xB_y=65\cdot68+63\cdot66+67\cdot68+64\cdot65+62\cdot69+70\cdot66+66\cdot68+68\cdot65+67\cdot71+78\cdot67+69\cdot68+71\cdot70$$

$$=4420+4158+4556+4160+4278+4620+4488+4420+4757+5226+4692+4970$$

$$\sum A_xB_y=54745\ \Rightarrow\ \frac{\sum A_xB_y}{n}=\frac{54745}{12}=4562.08$$

$$r=\frac{\frac{\sum A_xB_y}{n}-A_{\bar{x}}\cdot B_{\bar{y}}}{S_x\cdot S_y}=\frac{4562.08-67.50\cdot67.58}{4.1\cdot1.8}=\frac{4562.08-4561.65}{7.38}=\frac{0.43}{7.38}=0.058$$

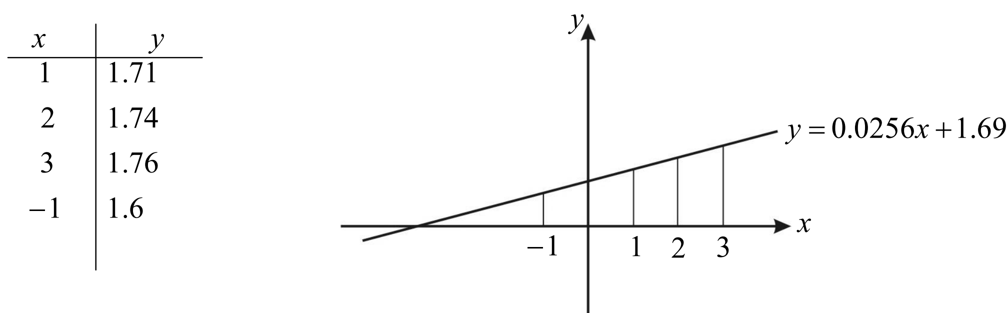
$$a=r\frac{S_y}{S_x}=0.058\frac{1.8}{4.1}=0.0256$$

$$b=\bar{y}-a\bar{x}=1.8-(0.0256)(4.1)=1.8-0.105=1.69$$

$$y=ax+b$$

معادلهٔ ریگریشن $\boxed{y=0.0256x+1.69}$

ج: طوری‌که معادلهٔ ریگریشن فوق را به دست آوردیم، حال خط را طور زیر رسم می‌کنیم:



x	y
1	1.71
2	1.74
3	1.76
-1	1.6

10- اگر x و y دارای همبسته گی و معکوس باشند $S_x = S_y$ خط رگرسیون y نسبت به x کدام است؟

1) $y = -\frac{1}{2}x + b$ 2) $y = \frac{1}{2}x + b$

(3) $y = x + b$ (4) $y = -x + b$

حل: هرگاه x و y همبسته‌گی داشته باشند به این معنی است که ضریب تغییرات $r = \pm 1$ است؛پس:

$$a = r\frac{S_y}{S_x} = \pm\frac{S_y}{S_x}$$

طوریکه میدانیم $S_x = S_y$ است؛ پس:

$$a = \pm\frac{S_y}{S_x} = \pm 1$$

$$y = ax + b$$

$$y = \pm x + b \quad \Rightarrow \quad y = x + b \quad , \quad y = -x + b$$

11- پراکنده‌گی نتایج امتحانات 20% مضمون ریاضی و مضمون فزیک 20 شاگرد به شرح زیر آمده است گراف پراکنده‌گی آن را رسم کنید.

شاگرد	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
نمره ریاضی	18	8	12	18	16	6	10	6	16	10	12
نمره فزیک	16	10	8	18	14	10	10	6	10	14	10

شاگرد	12	13	14	15	16	17	18	19	20
نمره ریاضی	12	10	16	18	12	6	14	14	12
نمره فزیک	6	12	16	12	12	8	12	14	16

- معادله خط رگرسیون را به دست آورید.
- آیا ارتباط بین نتایج دو امتحان وجود دارد؟

حل:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{20}x_i}{20}=\frac{246}{20}=12.3$$

$$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{20}y_i}{20}=\frac{234}{20}=11.7$$

$$S_x^2=\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2}{n}=(18-12.3)^2+(8-12.3)^2)+(12-12.3)^2+(18-12.3)^2+(16-12.3)^2+(6-12.3)^2+$$

$$\frac{+(10-12.3)^2+(6-12.3)^2+(16-12.3)^2+(10-12.3)^2+(12-12.3)^2+(12-12.3)^2+(10-12.3)^2+(16-12.3)^2+(18-12.3)^2+(12-12.3)^2+(6-12.3)^2+(14-12.3)^2+(14-12.3)^2+(12-12.3)^2}{20}$$

$$=\frac{32.49+18.49+0.09+32.49+13.69+39.69+5.29+39.69+13.69+5.29+0.09+0.09+}{}$$

$$\frac{+5.29++13.69+32.49+0.09+39.69+2.89+2.89+0.09}{20}=\frac{258.51}{20}=12.92\Rightarrow\boxed{S_x=3.59}$$

$$S_y^2=\frac{\sum_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2}{n}=(16-11.7)^2+(10-11.7)^2+(8-11.7)^2+(18-11.7)^2+(14-11.7)^2+(10-11.7)^2+$$

$$\frac{+(10-11.7)^2+(6-11.7)^2+(10-11.7)^2+(14-11.7)^2+(10-11.7)^2+(6-11.7)^2+(12-11.7)^2+(16-11.7)^2+(12-11.7)^2+(12-11.7)^2+(8-11.7)^2+(12-11.7)^2+(14-11.7)^2+(16-11.7)^2}{20}$$

$$S_y^2=\frac{18.49+2.89+13.69+39.69+5.29+2.89+2.89+32.49+2.89+5.29+2.89+32.49+0.09+}{}$$

$$\frac{+18.49+0.09+0.09+13.69+0.09+5.29+18.49}{20}$$

$$S_y^2=\frac{218.2}{20}=10.91\Rightarrow\boxed{S_y=3.3}$$

$$\sum x\cdot y=18\cdot16+8\cdot10+12\cdot8+18\cdot18+16\cdot14+6\cdot10+10\cdot10+6\cdot6+16\cdot10+10\cdot14+12\cdot10+12\cdot6$$
$$+10\cdot12+16\cdot16+18\cdot12+12\cdot12+6\cdot8+14\cdot12+14\cdot14+12\cdot16$$
$$=288+80+96+324+224+60+100+36+160+140+120+72+120+256+216+144+48+168+196+192$$

$$\sum x\cdot y=3040\quad,\quad\frac{\sum x\cdot y}{n}=\frac{3040}{20}=152$$

$$r=\frac{\frac{\sum x\cdot y}{n}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x\cdot S_y}=\frac{152-12.3\cdot11.7}{3.59\cdot3.3}=\frac{152-143.91}{11.847}=\frac{8.09}{11.847}=0.68$$

از ضریب همبسته‌گی نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

- با ازدیاد قیمت x، قیمت y هم زیاد می‌شود.
- یعنی بین x و y تقریباً 68% همبسته‌گی وجود دارد.

$$a=r\frac{S_y}{S_x}=0.68\frac{3.3}{3.59}=\frac{2.244}{3.59}=0.625$$

$$b=\bar{y}-a\bar{x}=11.7-0.625(12.3)=11.7-7.687=4.013$$

معادلهٔ ریگریشن $y=ax+b\Rightarrow\boxed{y=0.625x+4.013}$

بلی، میان دو امتحان ارتباط ($y=0.625x+4.013$) وجود دارد.

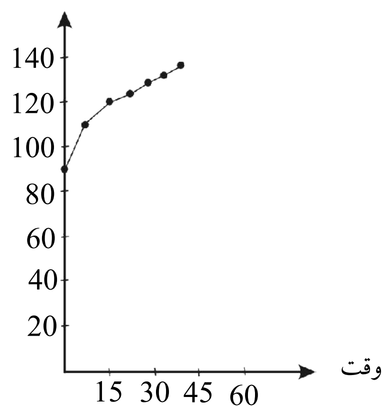
12- تاثیر قرار گرفتن بقه ها در معروض محلول 1.5 فیصده نمک طعام بر میزان یون پلازما در بدن آن ها در جدول زیر ثبت شده است.

زمان قرار گرفتن در معروض نمک طعام(ساعت)	50	40	30	20	10	5	0
میزان یون پلازما (mm)	136	132	126	122	118	10	90

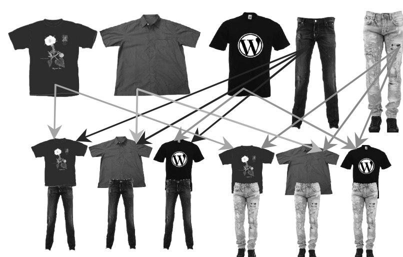
- در این جدول متحول ها را بررسی نمایید وبگویید کدام وابسته و کدام مستقل است؟
- گرافی رسم کنید که ارتباط بین دو متحول را نشان دهد.
- در رسم این گراف متحول مستقل را روی محور افقی نمایش دهید.

حل: در جدول فوق دو نوع متحول است:

- متحول اول وقت و متحول دوم میزان یون پلازما می‌باشد.
- در متحول‌های فوق، وقت یک متحول مستقل و یون پلازما متحول وابسته است.



از گراف بالا معلوم می‌شود که با زیاد شدن وقت، میزان یون پلازما هم زیاد می‌شود.



فصل نهم احتمالات

عنوان درس: ترتیب(*Permutation*)

صفحهٔ کتاب (305)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان بتوانند تا: • مفهوم ترتیب را بدانند. • سؤالهای مربوط ترتیب را حل کنند. • با کسب دانش و مهارت فوق اعتماد به نفس پیدا کنند و در حل مسائل روزانه از آن کار بگیرند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و کار انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، توجه شاگردان را به چارت ورودی معطوف نماید و بپرسد: • کی گفته میتواند، به چند حالت میتوان از سه پیراهن و دو پطلون جوره، جوره خریداری کرد؟ • به چند قسم میتوانید سه قلم را در صندوق پهلو به پهلو قرار دهید؟ • از عدد 7، 5 و 2 چند عدد سه رقمی به دست می‌آید؟ کوشش شود تا جواب درست از شاگردان به دست بیاید در صورت داشتن مشکل، معلم کمک و رهنمایی کند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 305 کتاب را در مشورت باهم انجام دهند.
- معلم از جریان فعالیت نظارت کند و در صورتیکه شاگردان مشکل داشته باشند آنها را کمک نماید.
- معلم در ختم فعالیت یک یا دو نمایندهٔ از گروه‌ها را بخواهد تا فعالیت گروهی، گروه خویش را به دیگران توضیح کند، در صورت اشتباه، ایشان را کمک و رهنمایی نماید. بعد معلم ترتیب(پرموتیشن) را برای شاگردان تعریف کند. تنظیم اشیای متمایز را پهلوی هم دیگر در یک قطار، طوریکه در جا به جایی شان ترتیب مد نظر گرفته شود به نام ترتیب یا permutation یاد می کنند.
- هرگاه در ترتیب تکرار مجاز نباشد؛ پس $P_n = n!$ و اگر تکرار مجاز باشد؛ پس $P_n = n^n$ است.

- برای تفهیم بیشتر شاگردان مثال صفحهٔ 306 کتاب را بدون استفاده از کتاب، در کتابچه‌های خویش حل کنند، بعد معلم مثال مذکور را روی تخته حل کند تا شاگردان حل‌های خویش را مقایسه و اشتباه خویش را اصلاح نمایند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بیشتر درس، مثالهای دوم، سوم و چهارم صفحات 306 و 307 کتاب را به نوبت توسط دو، سه شاگرد روی تخته حل کند، همزمان عین مثالها را شاگردان بدون استفاده از کتاب در کتابچه‌های خویش حل کنند و با حل روی تخته مقایسه نمایند در صورت اشتباه، معلم کمک و رهنمایی کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای مطمئن شدن از فراگیری شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد:

1. کی permutation یا ترتیب را تعریف می‌کند؟
2. !5 مساوی به کدام عدد می‌شود؟
3. از اعداد $3,4,7,8$ و 2 چند عدد پنج رقمی حاصل می‌شود؟
4. به چند قسم می‌توانید بیرق‌های کشورهای B, A و C را پهلوی هم قرار دهید؟

معلومات اضافی برای معلم

- معلم محترم برای یکعدد طبیعی$(n\cdot(n-1)\ \dots\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot)$ حاصل ضرب به طور مختصر $n!$ (n–فکتوریل) نشان داده می‌شود بنا به تعریف $1!=1$ و $0!=1$ است.

$$2!=2\cdot 1=2$$
$$3!=3\cdot 2\cdot 1=6$$
$$4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$$
$$5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$$
$$6!=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=720$$
$$n!=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ \dots\ 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

1) $\dfrac{4!\,6!}{8!}=\dfrac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 6!}{8\cdot 7\cdot 6!}=\dfrac{8\cdot 3}{8\cdot 7}=\dfrac{3}{7}$

2) $\dfrac{(n+1)(n+2)!}{(n+3)!}=\dfrac{(n+1)(n+2)!}{(n+3)(n+2)!}=\dfrac{n+1}{n+3}$

3) $\dfrac{6!}{7!-6!}=\dfrac{6!}{6!(7-1)}=\dfrac{6!}{6!\cdot 6}=\dfrac{1}{6}$

4) $\dfrac{2n!(n-2)!}{4(2n-2)!n!}=\dfrac{2n(2n-1)(2n-2)!(n-2)!}{4(2n-2)!n(n-1)(n-2)!}=\dfrac{2n(2n-1)}{4n(n-1)}=\dfrac{2n-1}{2(n-1)}$

برای ازدیاد معلومات در ارتباط درس یک مثال را در نظر میگیریم:

مثال: از اعداد $\{1,5,4,2,8\}$ چند عدد پنج رقمی، طوری که رقم‌های آنها تکرار نباشد و از عدد 30000 زیاد باشند ساخته می‌توانید؟

حل: برای پنج رقم، پنج خانۀ خالی را در نظر میگیریم و در آن جاهای اعداد را طوری انتخاب می‌کنیم که از 30000 زیاد باشد.

برای پر کردن خانۀ ده‌هزارها، از ست اعداد داده شده سه امکان وجود دارد که این عدد 3 را زیر مرتبۀ ده‌هزار می‌نویسیم، یعنی مرتبۀ ده‌هزارها طبق شرط سؤال اعداد 5,8 و 4 را نوشته میتوانیم، لیکن برای پُر کردن خانۀ ده-هزارها از ست اعداد رقمهای 1 و 2 را نمیتوانیم انتخاب کنیم، زیرا که عدد خواسته شده پنج رقمی از 30000 کم می‌شود. طوریکه برای پُر کردن خانۀ ده‌هزارها یکی از اعداد 5,4 و 8 انتخاب شد؛ پس به ست اعداد داده شده چهار رقم دیگر باقی میماند که برای پُر کردن خانۀ هزارها از چهار رقم، هر کدام آن را انتخاب نموده میتوانیم، یعنی برای پُر کردن خانۀ هزارها 4 امکان وجود دارد از همین سبب رقم 4 را در خانۀ هزارها مینویسیم. همین قسم برای پُر کردن مرتبۀ صدها، 3رقم باقی میماند که آن را توسط سه رقم باقیمانده به سه شکل پُر می کنیم؛ پس گفته می‌شود که برای پُر کردن آن 3 امکان موجود است، از همین سبب رقم 3 را زیر خانۀ صدها مینویسیم، همین طور برای پُر کردن خانۀ ده‌ها دو امکان موجود است و برای پُر کردن خانۀ یکها، یک امکان وجود دارد، که به ترتیب رقم‌های 2 و 1 را به زیر مرتبه‌های ده‌ها و یکها مینویسیم.

در اخیر گفته میشود که برای پُر کردن خانه‌های نامبرده، حاصل ضرب امکانات، تعداد اعداد پنج رقمی خواسته شده را نشان می‌دهد.

ده‌هزارها	هزارها	صدها	ده‌ها	یکها
↓	↓	↓	↓	↓
3	4	3	2	1

$N=3\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=12\cdot6=72$

از اعداد داده شده به تعداد 72 عدد پنج رقمی که در آنها اعداد تکراری نباشد حاصل میشود.

جواب به سؤال های تمرین صفحۀ 308

1. چند عدد پنج رقمی و جود دارد که رقم اول آن‌ها 2 و رقم اخیر آن‌ها 4 باشد و در عدد هیچ رقم تکراری وجود نداشته باشد.

حل: میدانیم که تمام اعداد یک رقمی عددهای $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ می‌باشند؛ پس پنج خانۀ خالی را طور زیر در نظر میگیریم:

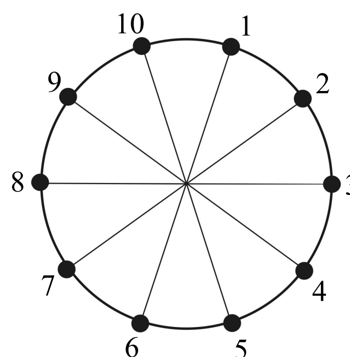
↓	↓	↓	↓	↓
1	8	7	6	1

تمام اعداد پنج رقمی که رقم اول آنها 2 و رقم آخرین آنها 4 باشد و تکرار هم مجاز نباشد مسایست به:

$1\cdot8\cdot7\cdot6\cdot1=56\cdot6=336$

2. به چند شکل 10 نفر می توانند دور یک میز گرد بنشینند، طوریکه از جمله دو نفر آن می خواهند در هر حالت کنار هم باشند؟

حل: آن دو نفری که میخواهند با هم پهلو به پهلو بنشینند برای هر دوی شان یک حالت در نظر گرفته میشود، بنا برآن وقتیکه دو چوکی توسط دو نفر اشغال می‌شود؛ پس 8 چوکی باقی میماندکه آنها به شکل !8 بالای آن می-توانند بنشینند که آن دو نفر نیز دو حالت دارند؛ یعنی به تبدیلی جای هر دوی آنها با یکدیگردو حالت موجود است که طور زیر به عدد 2 ضرب میشود.



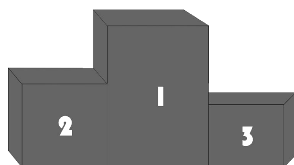
$$2(8!) = 2(8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1) = 2(40320) = 80640$$

3. به چند شکل میتوان 3 توپ به رنگ سرخ، 2 توپ آبی 4 توپ زرد را کنار هم قرار دهیم (ترتیب توپ های هم رنگ قابل حساب نیستند).

حل:

$$P_n^{(k_1,k_2,\ \dots\ ,k_n)} = \frac{n!}{(k_1!\cdot k_2!\cdot\ \dots\ \cdot k_n!)}$$

$$\left.\begin{aligned} n &= 3+2+4 = 9 \\ k_1 &= 3 \\ k_2 &= 2 \\ k_3 &= 4 \end{aligned}\right\} \quad P_9^{(3,2,4)} = \frac{9!}{3!\cdot2!\cdot4!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4!}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot4!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot5}{2\cdot1} = 9\cdot4\cdot7\cdot5 = 36\cdot35 = 1260$$



فصل نهم احتمالات

عنوان درس: ترکیب‌ها(*Combinations*)

صفحهٔ کتاب (309)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی – دانشی – مهارتی – ذهنیتی	شاگردان بتوانند تا: • مفهوم ترکیب را بدانند. • سؤالهای ترکیب را تشخیص و حل نمایند. • از فراگیری دانش و مهارت فوق در زنده‌گی روزانه استفاده کنند و از آن لذت ببرند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و کار انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	– معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، با یادآوری از درس گذشته توجه شاگردان را به چارت ورودی جلب نماید و سؤال کند. • ترکیب عددهای 2 و 3 مساوی به کدام عدد می‌شود؟ • از نظر شما، ترتیب و ترکیب باهم چی ارتباط دارند؟ – معلم کوشش کند تا از شاگردان جواب درست بگیرد، در صورت داشتن مشکل، آنها را کمک و رهنمایی نماید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 309 را در مشورت باهم انجام دهند.
- معلم از جریان فعالیت نظارت کند، در صورتیکه شاگردان مشکل داشته باشند، آنها را کمک نماید.
- معلم در ختم فعالیت یک یا دو نماینده از گروه‌ها را بخواهد تا فعالیت گروهی، گروه خویش را به دیگران توضیح دهند. هرگاه گروهی مرتکب اشتباه شده باشد، کوشش شود تا اشتباه توسط نمایندهٔ گروه دیگر رفع شود، سپس معلم طور زیر ترکیب را تعریف کند:
- از n شی متمایز، انتخاب اشیای r ، طوریکه $r \le n$ بوده و در انتخاب شان ترتیب مدنظر نباشد ترکیب نامیده می‌شود که با سمبول $C\binom{n}{r} = C_r^n = \binom{n}{r}$ ارائه می‌شود. $\binom{n}{r}$ اینطور خوانده می‌شود که(n در r) و از روی تعریف $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ است.
- معلم مثال اول صفحهٔ 310 کتاب را با سؤال و جواب روی تخته حل کنند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بیشتر درس، یک شاگرد داوطلب را بخواهد تا مثال دوم صفحهٔ 310 کتاب را روی تخته حل کند. همزمان عین مثال را شاگردان دیگر بدون استفاده از کتاب در کتابچه‌های خویش حل کنند و با حل رور تخته مقایسه نمایند. در صورتیکه شاگردان مشکل داشته باشند معلم کمک و رهنمایی کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم جهت پیدا کردن اطمینان از آموزش شاگردان، سؤالهای زیر را از شاگردان بپرسد، کوشش شود تا جوابهای صحیح از ایشان به دست آید.

1. فرق میان ترکیب و ترتیب چیست؟
2. $C_3^5 = \binom{5}{3}$ با کدام عدد مساوی است؟

معلومات اضافی برای معلم

میخواهیم نشان دهیم که $0!=1$ است وهم میدانیم که $n!=n(n-1)(n-2)\ \ldots\ 3\cdot 2\cdot 1$ است؛ پس داریم که:

$$(n+1)!=(n+1)n!$$

اگر $n=0$ شود؛ پس:

$$(0+1)!=(0+1)0!$$

$$1=1!=1\cdot 0!\ \Rightarrow\ 0!=1!=1$$

حال می خواهیم ثابت کنیم که $C_n^n=\binom{n}{n}=1\ ,\ C_0^n=\binom{n}{0}=1$ و $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r}$ است.

حل: با به کار گیری تعریف ترکیب داریم:

$$C_0^n=\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!(n-0)!}=\frac{n!}{1\cdot n!}=1$$

$$C_n^n=\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{n!}{n!\cdot 0!}=\frac{n!}{n!\cdot 1}=\frac{n!}{n!}=1$$

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\frac{n!}{r!(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}=\frac{n!(n-r+1)+rn!}{r!(n-r+1)!}$$

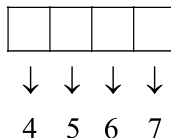
$$=\frac{n!(n-r+1+r)}{r!(n+1-r)!}=\frac{(n+1)n!}{r!(n+1-r)!}$$

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\frac{(n+1)n!}{r!(n+1-r)!}=\frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!}=\binom{n+1}{r}=C_r^{n+1}$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 310

1- با هفت حرف G,F,E,D,C,B,A چند کلمهٔ 4 حرفی، بدون تکرار میتوانیم بسازیم؟

حل: میدانیم که تعداد تمام حرفها 7 می‌باشد؛ پس برای ساختن کلمات 4 حرفی چهار جای خالی را در نظر می گیریم که برای خانهٔ خالی اول از جملهٔ 7 حرف، 7 امکان موجود است، یعنی:

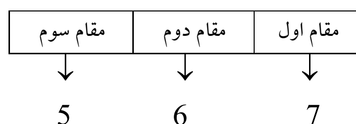


4 5 6 7

$840 = 42\cdot 20 = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 =$ تمام کلمات 4 حرفی که از حروف بالا به دست می‌آید.

2- هفت تیم در یک تیم والیبال اشتراک دارند، به چند شکل تیم ها میتوانند مقام اول، دوم وسوم را به دست آورند؟

حل:



5 6 7 $= 7\cdot 6\cdot 5 = 42\cdot 5 = 210$

یعنی به 210 قسم تیم‌ها میتوانند مقام اول، دوم و سوم را به دست آورند.

3- ازبین 4 مرد و 6 زن به تعداد 2 مرد و 3 زن را طوری انتخاب می نماییم که از تیم انتخابی مرد ها، اولی رئیس و دومی مسئوول مالی باشد.

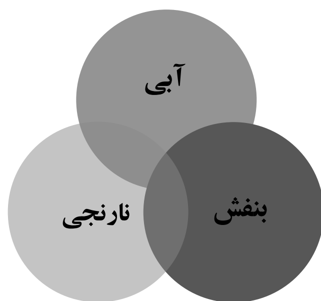
حل: از عبارت سؤال معلوم میشود که از جملهٔ 4 مردو 6 زن، 2 مرد و سه زن را طوری انتخاب می کنیم که مرد اول به حیث رئیس و مرد دوم به صفت مسئوول مالی باشد. در تعیین مردها، ترتیب انتخاب مدنظر گرفته می‌شود، بنا بر آن تعیین مردها به تبدیل حل می‌شود، لیکن در تعیین سه زن، ترتیب هم مدنظر نیست؛ پس تعیین یا انتخاب زن‌ها به ترکیب حل می‌شود.

$$\text{انتخاب مردها} = P_2^4 = V_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!} = 4\cdot 3 = 12$$

$$\text{انتخاب زنها} = C_3^6 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{6} = 5\cdot 4 = 20$$

$$\text{از 4 مرد و 6 زن انتخاب 2 مرد و سه زن} = P_2^4\cdot C_3^6 = 12\cdot 20 = 240$$

در نتیجه با در نظرداشت شرایط داده شده، 2 مرد و 3 زن را 240 قسم میتوانیم انتخاب کنیم.



فصل نهم احتمالات

عنوان درس: ترکیب(Combination)

صفحهٔ کتاب (311)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان بتوانند تا: • مفهوم ترکیب را بدانند. • سؤالهای ترکیب را تشخیص و حل نمایند. • دانش و مهارت فوق را در زنده‌گی به کار ببرند و از آن احساس خوشی برایشان دست بدهد.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و کار انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، با یادآوری از درس گذشته توجه شاگردان را به چارت ورودی معطوف بدارد و از آنها سؤالهای زیر را بپرسد: • در شکل چند رنگ را می بینید؟ • از ترکیب رنگ آبی و نارنجی کدام رنگ حاصل می‌شود؟ • به نظر شما رنگ زرد، از ترکیب کدام رنگها حاصل می‌شود؟ • از ترکیب اعداد 5 و 2 کدام عدد حاصل می‌شود؟ - معلم کوشش کند تا جواب سؤالها را شاگردان بدهند، در صورت داشتن مشکل معلم کمک و رهنمایی نماید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 311 کتاب را با بحث و مذاکره در گروه‌های شان انجام دهند.
- معلم از جریان فعالیت شاگردان نظارت کند در صورت داشتن مشکل ایشان را کمک و یاری رساند، بعضی اوقات ترتیب نمودن اشکال و اشیای مختلف و اجزای شان به شکل مطلوب از طریق ترتیب و هم از طریق ترکیب صورت میگیرد؛ طور مثال: جمع کردن گل‌های مختلف در یک ساحهٔ زینتی، انتخاب گل‌های مختلف، گذاشتن بیرق‌های کشورهای مختلف طوریکه موقعیت به سزای خود را داشته باشد و مثالهای دیگر، لیکن با آنهم گفته می‌شود که ترکیب و ترتیب از هم فرق دارند که ترکیب را طور زیر تعریف می کنیم:

گروه بندی اعداد، اشیا و اجزاء بعضی اوقات طوری می‌باشد که سلسلهٔ مراتب و نوبت مراعات نمیشود یا به عبارت دیگر از n تعداد اشیاء، انتخاب r شی را که($0 \le k \le n$)می‌باشد و در انتخاب آن ترتیب مراعات نمیشود به نام ترکیب یاد می کنند که فارمول آن $C_k^n = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ است.

- معلم برای تفهیم هر چه بیشتر درس، مثال اول صفحهٔ 312 کتاب را به شیوهٔ سؤال و جواب روی تخته حل کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس یک شاگرد داوطلب را بخواهد تا مثال دوم صفحهٔ 312 کتاب را روی تخته حل کند. همزمان عین مثال را شاگردان دیگر(بدون استفاده از کتاب) در کتابچه‌های خویش حل کنند. در اخیر شاگردان حل خویش را

با حل مثال روی تخته مقایسه کنند، در صورتیکه مرتکب اشتباه شده باشند، اشتباه خویش را رفع نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم غرض اطمینان یافتن از آموزش شاگردان سؤالهای زیر را از آنها بپرسد و کوشش نماید تا شاگردان خود جواب ارائه بدارند:

1. کی ترکیب را تعریف می‌کند؟
2. ترکیب از ترتیب چی فرق دارد؟
3. حال ترکیب $C_2^6=\binom{6}{2}$ مساوی به کدام عدد می‌شود؟

معلومات اضافی برای معلم

- معلم محترم، چون ترکیب در انتخاب نمونه گیری برای تحقیق ضروری پنداشته می‌شود از اینرو دارای اهمیت است. تا آنکه تمام اعداد یک مجموعه از جنس نمونه باشد و بر عکس از افراد و اشیای مختلف یک جمعیت یا نفوس(population) ترکیب می‌شود، بنا برآن اهمیت دو بعدی دارد.

ما در احتمالات برای نفوس(جمعیت) و هم برای نمونه تعریف خاص داریم:

نفوس عبارت از آن مجموعهٔ افراد، اشیاء، حادثات و یا امکانات است که دارای خصوصیات مشترک می‌باشند.

حال چند مثال را که در ارتباط ترکیب می‌باشد در نظر میگیریم:

میخواهیم نشان دهیم که برای هر $k\geq 1$، $\frac{k}{n}\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}$ است.

ثبوت:

$$\frac{k}{n}[\frac{n!}{k!(n-k)!}]=\frac{k}{n}[\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!}]=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\ \dots\ *$$

$$\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\ \dots\ **$$

$$*,**\ \Rightarrow \frac{k}{n}\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}$$

همین قسم میخواهیم ثبوت نماییم که: $(k+1)\binom{n}{k+1}=(n-k)\binom{n}{k}$

ثبوت:

$$(k+1)\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=(k+1)\frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!}=\frac{n!}{k!(n-k-1)!}=\frac{(n-k)n!}{k!(n-k)(n-k-1)!}$$

$$=(n-k)\frac{n!}{k!(n-k)!}=(n-k)\binom{n}{k}\ \Rightarrow\ (k+1)\binom{n}{k+1}=(n-k)\binom{n}{k}$$

$$\Rightarrow\ (k+1)!\binom{n}{k+1}=(n-k)\binom{n}{k}$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ 312

1- هرگاه در یک امتحان از جملهٔ 10 سؤال به 7 سؤال جواب مطلوب باشد، به چند شکل میتوانیم از 10 سؤال 7 سؤال برای حل انتخاب نماییم؟

حل: طوریکه دیده می‌شود از جملهٔ 10 سؤال جواب 7 سؤال آن مطلوب است؛ پس معلوم می‌شود که ترتیب انتخاب مد نظر نیست، بنا برآن این سؤال به ترکیب حل می‌شود.

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C_7^{10} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$C_7^{10} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$$

2- 5 نقطهٔ مختلف را در یک مستوی که به استقامت یک خط مستقیم واقع نیستند در نظر بگیرید. به چند شکل مثلث را می توانیم تشکیل دهیم؟

حل: این سؤال هم به ترکیب حل می‌شود، زیرا که ترتیب انتخاب، در آن مد نظر گرفته نشده است، از این که مثلث از سه نقطه می گذرد؛ پس:

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1}$$

$$C_3^5 = 5 \cdot 2 = 10$$

یعنی از نقاط داده شده به 10 شکل می توانیم مثلثها را بسازیم.

3- اگر $P(n,2) - C_n^{(2)}$ باشد، قیمت n چند است؟

حل:

$$P(n,2) = \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$P(n,2) - C_2^n = \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{2!n! - n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!(2! - 1!)}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = 36$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} = 36 / \cdot 2$$

$$\Rightarrow \; P(n,2) - C_2^n = n^2 - n = 72$$

$$\Rightarrow \; n^2 - n - 72 = 0 \quad \Rightarrow \; \Delta = 1^2 - 4(1)(-72)$$

$$\Delta = 1 + 288 = 289$$

$$\sqrt{\Delta} = \pm 17$$

$$n_1 = \frac{1+17}{2} = \frac{18}{2} = 9 \quad , \quad n_2 = \frac{1-17}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

از این که n قیمت منفی را گرفته نمیتواند؛ پس $n = 9$ است.

میزان:

$$P(n,2) - C_2^n = 36$$

$$P(9,2) - C_2^9 = 36$$

$$P(9,2) = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 9 \cdot 8 = 72$$

$$C_2^9 = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{2 \cdot 1 \cdot 7!} = 9 \cdot 4 = 36$$

$$P(9,2) - C_2^9 = 72 - 36 = 36$$



فصل نهم احتمالات

عنوان درس: تبدیل(*Variation*)

صفحهٔ کتاب (313)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان بتوانند تا: • مفهوم تبدیل را بدانند. • سؤالهای مربوط تبدیل را حل کنند. • مشکلات روزمره را به ارتباط تبدیل حل و اعتماد به نفس پیدا کنند.
روش‌های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و کار انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، و یاد آوری از درس گذشته، توجه شاگردان را به چارت سؤال ورودی جلب نماید و بپرسد: • در شکل چارت چی می بینید واضح سازید؟ • به نظر شما تبدیل از ترکیب چی فرق دارد؟ • از حروف $\{a,b,c,d,e\}$ چند کلمهٔ سه حرفی ساخته می‌شود؟ - معلم کوشش کند تا جوابها را از شاگردان به دست بیاورد، در غیر آن معلم کمک و رهنمایی کند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 313 کتاب را بعد از بحث و مذاکره انجام دهند.
- معلم از جریان فعالیت شاگردان نظارت کند، در صورتی که شاگردان مشکل داشته باشند رهنمایی نماید. در ختم فعالیت یک یا دو نماینده فعالیت گروهی، گروه خویش را به دیگران با ارائه یک مثال توضیح کند. هرگاه در توضیح نماینده‌ها اشتباهی باشد توسط نمایندهٔ یک گروه دیگر به رفع اشتباه پرداخته شود، سپس معلم تبدیل را طور زیر تعریف کند:

از n تعداد اشیای متمایز، انتخاب اشیای k طوریکه $k \le n$ باشد و در آن ترتیب انتخاب مدنظر باشد عبارت از تبدیل می‌باشد و توسط فارمول $V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$ نشان داده می‌شود. یا به عبارت دیگر تنظیم نمودن اعداد، اشیاء و اجزاء طوری‌که نوبت در آن مراعات شود به نام تبدیل یاد می‌شود. برای تفهیم هر چه بیشتر موضوع مثال صفحهٔ 313 را روی تخته حل و قدم به قدم فارمول تبدیل را در آن تطبیق نماید و توضیحات لازم بدهد.

- معلم در اخیر یک شاگرد داوطلب را بخواهد تا از کلمهٔ پوهنتون به روی تخته چند کلمهٔ سه حرفی بدون تکرار حروف بسازد در صورت داشتن مشکل، معلم کمک و رهنمایی کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس یک شاگرد را بخواهد تا مثال صفحهٔ 314 کتاب را روی تخته حل کند. همزمان عین مثال را شاگردان دیگر در کتابچه‌های خویش(بدون استفاده از کتاب) حل نمایند و با حل روی تخته مقایسه کنند، در صورتی که شاگردان مشکلی داشته باشند معلم کمک و رهنمایی کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای مطمئن شدن از فراگیری شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد و کوشش شود تا جواب درست از شاگردان به دست آید.

1. فرق میان ترکیب و تبدیل چیست؟
2. $P(5,2)=P_2^5$ با کدام عدد مساویست؟
3. 5 تن از محصلین، از یک صنف 17 نفری به چند شکل مختلف می‌توانند در یک کورس پنج شعبه‌یی ثبت نام نمایند؟

معلومات اضافی برای معلم

- معلم محترم تبدیل نه تنها در مورد تبدیل، نسل‌گیری، تنظیم نباتات، یک تعداد عملیات، آبیاری وغیره مفید است، بلکه در تنظیم امور ورزشی، سیاسی، کلتوری و دیگر مسائل ما را توانایی می‌بخشد؛ مثلاً تیم‌های ورزشی 34 ولایت افغانستان احتمال و چانس چند دفعه رویارویی در مسابقات را دارند و چند بازی به آنها تنظیم شود.

شکل جابه جایی بیرق‌های کشورها در مجالس بین‌المللی، سپردن ریاست مجالس بزرگ برای نمایندهٔ یک کشور در هر روز و دیگر مسائل هم به کار برده می‌شود. برای وضاحت بیشتر موضوع، مثال زیر را در نظر می‌گیریم:

فرض می‌کنیم رئیس یک شفاخانه داکتر اول را از جملهٔ 5 داکتر، داکتر دوم از جمله 4 داکتر، و داکتر سوم را از 3 داکتر باقیمانده انتخاب کند؛ پس در اینجا 60 طریقه وجود دارد تا سه داکتر را از جملهٔ 5 داکتر برگزینند، که این 60 طریقه را با استفاده از فارمول زیر محاسبه میتوانیم:

$$V_k^n=V(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_3^5=V(5,3)=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2!}{2!}=5\cdot4\cdot3=60$$

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ316

1- از 12 تیم فوتبال شامل مسابقه، چند شکل برنده برای مقام اول، دوم و سوم وجود دارد؟

حل: سؤال بالا به تبدیل ارتباط دارد، زیرا ترتیب انتخاب، مد نظر است.

مقام اول	مقام دوم	مقام سوم
↓	↓	↓
12	11	10

$$N=12\cdot11\cdot10=12\cdot110=1320$$

از فارمول هم عین جواب به دست می‌آید:

$$V_3^{12}=\frac{12!}{(12-3)!}=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9!}{9!}=12\cdot11\cdot10=1320$$

2- از بین 20 تن شاگردان صنف یازدهم به چند شکل میتوان 2 تن را به حیث نماینده و معاون صنف انتخاب نمود؟

حل:

نماینده	معاون اول نماینده
↓	↓
20	19

$$N=20\cdot19=380$$

از فارمول هم عین جواب حاصل می‌شود:

$$V_2^{20}=\frac{20!}{(20-2)!}=\frac{20\cdot19\cdot18!}{18!}=20\cdot19=380$$

فصل نهم احتمالات

عنوان درس: قضیهٔ بینوم

صفحهٔ کتاب (317)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

اهداف آموزشی	شاگردان بتوانند تا:
- دانشی	• مفهوم قضیهٔ بینوم را بدانند.
- مهارتی	• با استفاده از قضیهٔ بینوم مطابقت $(a\pm b)^n$ را انکشاف دهند.
- ذهنیتی	• با کاربرد دانش و مهارت فوق اعتماد به نفس نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و کار انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد نیاز
توضیح ورودی (5) دقیقه	- معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، از درس گذشته طور مختصر یادآوری نماید، سپس توجه شاگردان را به بخش ورودی کتاب جلب نماید و بپرسد: • کی ضریب‌های مطابقت $(a+b)^3$ را به دست می‌آورد؟ • در شکل مقابل، اعداد به کدام ترتیب تنظیم شده اند؟ • اعداد قطار چهارم کدام‌ها اند؟ - معلم کوشش کند تا جواب سؤالها را از شاگردان به دست بیاورد، در صورت مشکل داشتن ایشان، معلم کمک و رهنمایی کند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحهٔ 317 کتاب را در مشورت باهم انجام دهند.
- معلم از جریان فعالیت نظارت کند، در صورتی که شاگردان مشکل داشته باشند آنها را کمک نماید. در اخیر معلم نمایندهٔ یک یا دو گروه را بخواهد تا فعالیت گروهی، گروه خویش را به دیگران توضیح دهد. هرگاه گروهی مرتکب اشتباه شده باشد، توسط نمایندهٔ گروه دیگری اشتباهش رفع شود، معلم موضوع را طور زیر تشریح کند:

در یک تجربهٔ تصادفی که عناصر فضای نمونه به تجربهٔ احتمال مساوی، بارها قابل تکرار باشد با تکرار n دفعه تجربه، انکشاف حد $k-$ام بینوم احتمال زیر را دارد:

$$\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}$$

بینوم فوق به $B(n,p,k)$ نشان داده می‌شود و به نام احتمال برنولی یاد می‌شود، که مساوی می‌شود به:

$$B(n,p,k)=\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}$$

فارمول مذکور به آن رویداد به کار می‌رود که از دو حالت خالی نباشد:

1) کامیابی 2) ناکامی

طور مثال: هرگاه در انداختن یک سکه به طرف بالا مطلوب آمدن خط باشد دراینجادو حالت وجود دارد: سکه خط می‌آید یا شیر. همین قسم برای احتمال وقوع یک رویداد P و برای عدم وقوع احتمال $1-p=q$ درنظر گرفته می‌شود.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم جهت تحکیم بخشیدن درس، یک شاگرد را بخواهد تا مثال صفحهٔ 318 را روی تخته حل کند. همزمان شاگردان دیگر عین مثال را(بدون استفاده از کتاب) در کتابچه‌های خویش حل نمایند و با حل روی تخته مقایسه کنند. در صورت داشتن مشکل، معلم کمک و رهنمایی کند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم غرض اطمینان خاطر از آموزش شاگردان سؤالهای زیر را از ایشان بپرسد و کوشش کند تا جواب درست از شاگردان به دست بیاورد:

1. آیا برای هر فضای نمونهٔ یک تجربهٔ تصادفی می‌توانیم، فضای نمونه را طوری تبدیل کنیم که دو عنصر داشته باشد؟
2. هرگاه احتمال وقوع یک عنصر فضای نمونه P باشد احتمال رویداد دیگر چند می‌باشد؟
3. هرگاه این قسم تجربه n دفعه تکرار شود؛ پس احتمال $k-$ام دفعه بُرد را در n دفعه تکرار پیدا کنید.

معلومات اضافی برای معلم

- معلم محترم! تا حال در مورد قضیهٔ بینوم معلومات به دست آوردیم. اکنون میخواهیم بدانیم که از قضیهٔ بینوم در احتمالات چی استفاده می‌شود؟ این موضوع را توسط مثال توضیح می‌دهیم:

مثال: یک سکه را در نظر میگیریم، طوریکه یک روی آن شیر و روی دیگر آن را خط می‌نامیم اگر حرف H از شیر و حرف T از خط نماینده‌گی کند تقسیم فریکونسی H و T که از اثر انداختن چهار دفعهٔ سکه به میان می‌آید با به کارگیری قضیهٔ بینوم محاسبه می کنیم: $(H+T)^4 = H^4 + 4H^3T + 6H^2T^2 + 4HT^3 + T^4$

توانهای حروف H و T طرف راست مساوات، از نوعیت ترکیب نماینده‌گی می کنند، طوریکه ضریب‌های هر حد طرف راست آن فریکونسی را نشان می‌دهد که یک ترکیب مثلاً H^3 یا H^2 تکرار می‌شود به این ترتیب گفته می‌توانیم که مجموع نتایج در عملیهٔ پرتاب سکه مساوی به 16 است یعنی مجموعهٔ ضرایب تمام حدها 16 می‌شود.

جواب به سؤال های تمرین صفحهٔ318

نشان دهید که:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \qquad (I)$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \qquad (II)$$

حلI: طرف چپ مساوات I را از طرف راست آن به دست می‌آوریم، طوریکه از بینوم نیوتن کار می گیریم یعنی:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ \ldots\ + \binom{n}{n}b^n$$

$$0 = (1+(-1))^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}(-1) + \binom{n}{2}1^{n-2}(-1)^2 + \binom{n}{3}1^{n-3}(-1)^3 + \ \ldots\ + \binom{n}{n}(-1)^n$$

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ \ldots\ + (-1)^n\binom{n}{n}$$

حل II: میدانیم که $1+1=2$ می‌شود، باز هم از بینوم نیوتن کار می گیریم و از طرف راست طرف چپ را به دست می‌آوریم:

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}\cdot 1 + \binom{n}{2}1^{n-2}\cdot 1^2 + \binom{n}{3}^{n-3}\cdot 1^3 + \ \ldots\ + \binom{n}{n}1^n$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ \ldots\ + \binom{n}{n}$$

فصل نهم احتمالات



عنوان درس: احتمال دو جمله‌یی

صفحۀ کتاب (319)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان بتوانند تا: • مفهوم دو جمله‌یی(بینوم) را بدانند. • سؤالهای مربوط احتمال دوجمله‌یی را حل کنند. • از احتمال دو جمله‌یی و حل سؤالهای آن احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و کار انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد نیاز
توضیح ورودی (5) دقیقه	معلم محترم بعد از اجرای فعالیت‌های مقدماتی، با یادآوری مختصر از درس گذشته توجه شاگردان را به سؤال ورودی کتاب جلب نماید و بپرسد: • در چارت کدام شکلها را می بینید؟ • اگر یک سکه به طرف بالا پرتاب شود وقتیکه سکه به زمین بیفتد کدام روی آن به طرف بالا می‌باشد(شیر یا خط)؟ • آیا با انداختن یک سکه، به جز از آمدن شیر یا خط کدام حالت دیگر وجود دارد؟ - معلم کوشش کند تا جوابها از شاگردان به دست بیاید، در صورت مشکل داشتن، معلم ایشان را کمک و رهنمایی نماید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

- معلم محترم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم کند تا فعالیت صفحۀ 319 کتاب را با بحث و مذاکره انجام دهند.
- معلم از جریان فعالیت شان نظارت کند، در صورتیکه شاگردان به مشکل مواجه شوند معلم کمک و رهنمایی کند. در ختم کار گروهی نمایندۀ یک گروه فعالیت گروهی، گروه خویش را به دیگران توضیح نماید، البته در صورت داشتن اشتباه، نمایندۀ یک گروه دیگر به رفع اشتباه بپردازد؛ سپس معلم موضوع را طور زیر تشریح کند:

برای هر فضای نمونه‌یی یک تجربۀ تصادفی میتوانیم فضای نمونه‌یی را طوری تبدیل کنیم که دو عضو داشته باشد. هرگاه احتمال یک عضو این قسم فضای نمونه‌یی P باشد؛ پس حتمی است که احتمال حالت دیگر آن $q=1-p$ می‌باشد و ناکامی است. هرگاه این قسم تجربه n دفعه تکرار شود؛ پس k–ام دفعه برد به n دفعه تکرار و احتمال

باخت به $q=1-p$ می‌باشد؛ یعنی داریم که:

$$P(k,n,p) \text{ دفعه تکرار } n \text{ ام دفعه بُرد به } -k = \binom{n}{k}P^k(1-p)^{n-k}$$

در فارمول فوق P احتمال وقوع یک رویداد تصادفی به هر واحد نمونه، kنتیجهٔ مطلوب تصادفی و n تعداد فضای نمونه را معرفی می‌کند و $\binom{n}{k}$ ضریب‌های رویداد مطلوب و مساوی به $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ می‌باشد.

در اخیر معلم مثال اول صفحهٔ 320 کتاب را به شیوهٔ سؤال و جواب در صنف حل کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

- معلم برای تحکیم بخشیدن درس یک شاگرد داوطلب را بخواهد تا مثال دوم صفحهٔ 320 کتاب را روی تخته حل کند، همزمان عین مثال را شاگردان دیگر در کتابچه‌های خویش(بدون استفاده از کتاب) حل کنند و با حل روی تخته مقایسه نمایند، در صورتیکه شاگردان مشکل داشته باشند معلم کمک و رهنمایی نماید.

معلم در اخیر دو شاگرد داوطلب را به نوبت بخواهد تا مثال سوم و چهارم صفحات 320 و 321 کتاب را روی تخته حل کنند، در صورت اشتباه معلم کمک و رهنمایی نماید.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

- معلم برای اینکه بدانند به اهداف خویش رسیده است یا خیر؟ سؤالهای زیر را از شاگردان بپرسد:

1. هرگاه یک سکه 5 دفعه بالا انداخته شود احتمال آمدن خط را در دفعهٔ سوم پیدا کنید.
2. فارمول احتمال دوجمله‌یی را بگویید و اجزای آن را توضیح دهید.
3. اگر یک سکه 20 دفعه بالا انداخته شود، احتمال آمدن شیر آن در مرتبهٔ دوازدهم چقدر است؟
4. احتمال دوجمله‌یی در احتمالات به چند رویداد احتمالی به کار می‌رود؟

معلومات اضافی برای معلم

معلم محترم! احتمال دوجمله‌یی آن افادهٔ ریاضیکی است که دو حد داشته باشد، یعنی آن رویداد تصادفی که احتمال وقوع آن از دو حالت(کامیابی و ناکامی) خالی نباشد به نام احتمال دو جمله‌یی یاد می‌شود.

در احتمالات، احتمال دوجمله‌یی وقتی مورد استعمال قرار میگیرد که:

گاهی دو چشم دید خود را یکجا بنویسیم که به طور خاص در سنجش احتمالات معمول است. برای وضاحت بیشتر مثال زیر را در نظر میگیریم:

مثال: هرگاه احتمال چوچه کشیدن 4 خروس و 2 ماکیان را از 6 بیضه تخم مرغ دریافت کنیم؛ پس به هر 6 آن احتمال چوچه مرغ‌های ماکیان را طور زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(k,n,P)=\binom{n}{k}P^k(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}P^k(1-p)^{n-k}$$

$k=4$ تمام رویدادهای تصادفی

$n=6$ تمام تخم های مرغ

$P=\frac{1}{2}$ احتمال پدید آمدن خروس یا چوچه ماکیان از یک تخم، طوریکه 50% از خروس و 50% از ماکیان:

$$P(4,6,\frac{1}{2})=\binom{6}{4}(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2})^2=\frac{6!}{4!(6-4)!}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}$$

$$P(4,6,\frac{1}{2})=\frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{15}{64}=0.23=23\%$$

یعنی امکان پدید آمدن چوچه مرغ ماکیان از 6 بیضه تخم 23% می‌باشد.

جواب به سؤال های تمرین صفحۀ 322

1- یک سکه را چند بار پرتاب نموده دریافت کنید احتمال آنکه:

i. در 4 بار پرتاب، دو بار خط بیاید.

ii. در 6 بار پرتاب ، چهار بار خط بیاید.

iii. در 8 بار پرتاب چهار بار خط بیاید.

iv. حدس بزنید اگر سکه را 2n بار پرتاب نماییم، n بار خط بیاید با افزایش n تغییرات p چگونه میباشد؟

حل (i): از فارمول خط آمدن(صفحۀ 316) کار می گیریم:

P (خط آمدن) $=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ احتمال خط آمدن به $k-$ام مرتبه

$$P(2)=\frac{\binom{4}{2}}{2^4}=\frac{\frac{4!}{2!(4-2)!}}{16}=\frac{\frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!\cdot 2!}}{16}=\frac{\frac{12}{2}}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

حل (ii):

$$\frac{\frac{6!}{4!(6-4)!}}{64}=\frac{\frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4\cdot 2!}}{64}=\frac{\frac{30}{2\cdot 1}}{64}=\frac{\frac{30}{2}}{64}=\frac{30}{2}\cdot\frac{1}{64}=\frac{15}{64}$$

حل (iii):

P (4 مرتبه خط آمدن) $P(4)=\frac{\binom{8}{4}}{2^8}=\frac{\frac{8!}{4!(8-4)!}}{256}=\frac{\frac{8!}{4!\cdot 4!}}{256}=\frac{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 4!}}{256}=\frac{\frac{70}{1}}{256}=\frac{70}{1}\cdot\frac{1}{256}=\frac{35}{128}$

حل (iv):

P (به $2n$ مرتبه پرتاب n بار خط آمدن) $=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}=\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}=\frac{\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}}{2^{2n}}=\frac{\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}}{2^{2n}}$

یعنی احتمال این که در $2n$ بار پرتاب، سکه n دفعه خط بیاید عبارت است از: $\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$

حل تمرینات عمومی فصل نهم(4 ساعت درسی)

1: مجموعه اعداد زیر را در نظر بگیرید $S=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ مطلوب است.

i) چند عدد سه رقمی با استفاده از عناصر مجموعه فوق میتوانیم ترتیب نماییم؟

ii) تعداد اعداد سه رقمی که جفت باشند چند است؟

iii) چه تعداد، اعداد مذکور مضرب 5 اند؟

iv) چه تعداد آنها مضرب 5 و بزرگتر از 300 اند؟

حل (i)**:** برای نوشتن عدد سه رقمی، سه جای خالی را مدنظر می‌گیریم، حال برای پرُ کردن مرتبۀ صدها از اعداد داده شدۀ ست فوق شش امکان موجود است، زیرا یک رقم اعداد ست مذکور صفر است که به مرتبۀ صدها نمیتوان آن را نوشت و بنا بر آن عدد سه رقمی به دست نمی‌آید. طوری‌که به ست نامبرده طور مجموعی هفت عدد است که یک آن به مرتبۀ صدها انتخاب گردیده است؛ پس به مرتبۀ ده‌ها هم شش امکان موجود است. در اخیر برای پُر کردن خانۀ یکها پنج عدد باقی میماند؛ پس گفته می‌توانیم که برای پُر کردن آن پنج امکان وجود دارد از همین رو در یکها رقم 5 را می‌نویسیم:

↓	↓	↓
6	6	5

$$6\cdot6\cdot5=36\cdot5=180$$

یعنی 180 عدد سه رقمی از ست اعداد فوق میتوان ترتیب نمود.

حل (ii)**:** برای پیدا کردن تعداد اعداد جفت سه رقمی سه جای خالی را در نظر می‌گیریم. طبق شرط داده شده نخست برای پُر کردن مرتبۀ یکها چهار امکان موجود است؛ یعنی هر یک از اعداد$(0,2,4,6)$ را برای پُر کردن مرتبۀ یکها می‌توانیم به کار ببریم. برای پُر کردن مرتبۀ ده‌ها؛ مانند: جزء اول شش امکان وجود دارد و برای پُر کردن مرتبۀ صدها پنج عدد باقی میماند. صفر را نمیتوان به مرتبۀ صدها جا به جا کرد، زیرا با نوشتن آن در مرتبۀ صدها عدد سه رقمی به دست نمی آید؛ پس برای پُر کردن مرتبۀ صدها چهار امکان داریم طور زیر:

↓	↓	↓
4	6	4

$$4\cdot6\cdot4=24\cdot4=96$$

حال گفته میتوانیم که تمام اعداد جفت سه رقمی که از ست اعداد مذکور به دست می‌آید 96 عدد می‌باشد.

حل (iii)**:** چون تمام مضربهای عدد 5 بر 5 پوره قابل تقسیم می‌باشند؛ پس اعداد سه رقمی ییرا پیدا می کنیم که قابلیت تقسیم بر 5 را داشته باشند، بنا بر آن سه جای خالی را در نظر می گیریم:

↓ ↓ ↓

4 6 2

میدانیم اعدادی که رقم اول آن صفر و یا عدد پنج باشد، مضرب 5 اند. از همین رو برای پُر کردن خانهٔ یکها دو امکان وجود دارد؛ زیرا یکی از ارقام $\{0,5\}$ به خانهٔ یکها تخصیص یافته است. برای پُر کردن خانهٔ صدها 4 امکان وجود دارد؛ زیرا صفر(0) در خانهٔ صدها جا گرفته نمیتواند.

یکها	ده‌ها	صدها

↓ ↓ ↓

تعداد امکانات 2 6 4

$$4\cdot6\cdot2=48$$

در نتیجه به تعداد 48 عدد از جملهٔ 180 عدد دریافت مضرب 5 می‌باشد.

حل (iv)**:** برای به دست آوردن تعداد اعدادی که هم مضرب 5 باشند و هم بزرگ از 300 باشند باز هم سه محل خالی را در نظر می گیریم:

↓ ↓ ↓

حال برای پُر کردن خانهٔ یکها 2 امکان و جود دارد یعنی صرف یکی از اعداد $\{0,5\}$ را به حیث رقم یکها نوشته می‌توانیم؛ پس رقم 2 را که نماینده‌گی از دو امکان می کند در مرتبهٔ یکها می‌نویسیم:

↓ ↓ ↓

2

برای پُر کردن مرتبهٔ صدها مطابق شرط 4 امکان وجود دارد،

↓ ↓ ↓

4 2

یعنی از اعداد $4,5,6$ و 3 استفاده کرده می‌توانیم تا عدد مطلوب بزرگتر از 300 شود؛ پس برای پُر کردن خانهٔ ده‌ها 5 امکان وجود دارد؛ پس:

↓ ↓ ↓

4 5 2

در نتیجه$(4\cdot5\cdot2=40)$ از جملهٔ 180 عدد دریافت شده، چهل عدد آن مضرب 5 و بزرگتر از 300 می‌باشد.

2: به چند طریقه میتوانند 6 شاگرد در یک قطار کنار هم ایستاده شوند؟

حل:



↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

1 2 3 4 5 6

$$N = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 30 \cdot 24 = 720$$

یعنی به 720 طریقه میتوانند شاگردان در یک قطار پهلوی هم بایستند.

3: به چند شکل احمد، مسعود، عبدالله، رومان و کیهان می توانند در یک قطار کنار هم عکس یاد گاری بگیرند؟ در صورتی که:

i) رومان و کیهان میخواهند در عکس کنار هم باشند.

ii) احمد و مسعود نمی خواهند در عکس کنار هم باشند.

iii) عبدالله میخواهد کنار چپ کیهان در عکس ایستاده باشد.

حل:

i): میدانیم که 5 نفر برای گرفتن عکس در 5 موقعیت ایساد میشوند، در اینجا چون رومان و کیهان میخواهند در کنار هم باشند؛ پس این دو نفر به !2 شکل پهلوی یکدیگر ایستاد شده میتوانند، چون رومان و کیهان کنار هم میباشند حکم یک نفر را دارند که در یک موقعیت برای گرفتن عکس ایستاد میشوند که با 3 نفر دیگر در مجموع در 4 موقعیت ایستاد میشوند؛ بنا بر آن:

$$2! \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48$$

در نتیجه 5 نفر تحت شرط فوق به 48 شکل ایستاده شده میتوانند، عکس یادگاری بگیرند.

ii): از حل (i)میدانیم که اگر از جمله 5 نفر در دو نفر بخواهند در کنار هم باشند به 48 شکل میتوانند برای گرفتن عکس ایستاده شوند، حال اگر دو نفر(احمد و مسعود) جهت گرفتن عکس یادگاری در کنار هم باشند برای به دست آوردن حالات مناسب از تمام حالات که 5 نفر ایستاده شده میتوانند، که دو نفر کنار هم باشند تفریق مینماییم؛ یعنی:

$$5! - 48 = 120 - 48 = 72$$

طبق شرط جزء (ii) پنج نفر به 72 شکل برای گرفتن عکس یادگاری میتوانند تنظیم شود.

iii): چون عبدالله میخواهد در کنار چپ کیهان باشد برای این دو نفر یک حالت است و این دو نفر حکم یک نفر را دارند که با 3 نفر دیگر جمعاً در 4 موقعیت به !4 شکل ترتیب میشوند؛ یعنی:

$$1 \cdot 4! = 24$$

4: به چند شکل میتوانیم که 9 نفر را به 3 گروپ تقسیم نماییم؟

حل:

$$N_1 = C_3^9 = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!\ 6!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 6!} = 3\cdot 4\cdot 7 = 12\cdot 7 = 84$$

$$N_2 = C_3^6 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!\ 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 3!} = 5\cdot 4 = 20$$

$$N_3 = C_3^3 = \binom{3}{3} = 1$$

$$N = N_1\cdot N_2\cdot N_3 = 84\cdot 20\cdot 1 = 1680$$

5: نشان دهید که $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n} = 2^n$.

حل: در معلومات اضافی قضیهٔ بینوم ثبوت گردیده است.

6: از روی مثلث پاسکال انکشاف $(a+b)^7$ مساوی به چند است؟

حل:

```
1
1  1
1  2  1
1  3  3  1
1  4  6  4  1
1  5  10  10  5  1
1  6  15  20  15  6  1
1  7  21  35  35  21  7  1
```

```
              1
            1   1
          1   2   1
        1   3   3   1
      1   4   6   4   1
    1   5  10  10   5   1
  1   6  15  20  15   6   1
1   7  21  35  35  21   7   1
```

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$